Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

ACAD. LAGB. BAT. BIBL.

vorgelegt von

PAUL KREUSER.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1914.

Von der Fakultät angenommen den 17. Januar 1914.
Referent: Prof. Dr. Perron.

Meiner lieben Mutter.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Einleitung 1

§ 2. Zweck dieser Arbeit 6

§ 3. Die Unterklassen der ersten Klasse 9

§ 4. Die Unterklassen einer beliebigen Klasse 12

§ 5. Beweis des Hilfssatzes V 24

§ 6. Abschätzung der Koeffizienten $p_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)$ 37

§ 7. Beweis des Satzes III 40

§ 8. Zwei Beispiele 44

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552714_0065

Literaturverzeichnis.

I. Erb.

1. Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzengleichungen durch Potenzreihen. Münchner Diss. 1913.

II. Horn.

1. Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen. Journal für r. u. a. Math. Bd. 138.
2. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Ann. 53.

III. Perron.

1. Über einen Satz des Herrn Poincaré. Journal für r. u. a. Math. Bd. 136.
2. Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung. Journal für r. u. a. Math. Bd. 137.
3. Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 19 Heft 3/4.
4. Über lineare Differenzengleichungen. Acta Math. Bd. 34.

IV. Poincaré.

1. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American Journ. of Math. Bd. 7.

§ 1.

Einleitung.

Versteht man unter D_v und $a_i^{(v)}$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ Funktionen der unabhängigen Variabeln v, so hat die allgemeine homogene lineare Differenzengleichung r-ter Ordnung die Form:

$$(1) \quad D_{v+r} + a_1^{(v)} D_{v+r-1} + a_2^{(v)} D_{v+r-2} + \cdots + a_r^{(v)} D_v = 0.$$

Hiebei kann die Variable v als stetig veränderlich gedacht werden; wir beschränken sie aber im folgenden auf die ganzzahligen Werte $v = 0, 1, 2 \ldots$, weshalb die Koeffizienten $a_i^{(v)}$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ auch bloß für diese Werte von v definiert sein müssen. Zugleich bestimmen wir, daß im folgenden stets $a_r^{(v)} \neq 0$ für sämtliche in Betracht kommenden Werte von v.

Befriedigt eine Funktion D_v für $v = 0, 1, 2 \ldots$ die Gleichung (1), dann heißt D_v ein Integral der Gleichung (1). Wegen der Voraussetzung über $a_r^{(v)}$ ist ein solches durch irgendwelche r aufeinanderfolgende Integralwerte D_N, D_{N+1}, $\ldots$ D_{N+r-1} eindeutig festgelegt; denn die fehlenden Integralwerte ergeben sich dann ohne weiteres aus Gleichung (1). Jede solche Differenzengleichung besitzt r linear unabhängige Integrale $D_v^{(1)}$, $D_v^{(2)}$, $\ldots$ $D_v^{(r)}$ und das allgemeine Integral D_v ist dann gegeben durch:

$$D_v = c_1 D_v^{(1)} + c_2 D_v^{(2)} + \cdots + c_r D_v^{(r)},$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_r$ willkürliche Konstanten sind.

Will man nun das Verhalten der Integrale der Gleichung (1) für $\lim v = \infty$ feststellen, so ist hiezu die Kenntnis des infinitären Verhaltens der Koeffizienten $a_i^{(v)}$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ nötig. Je nach der Beschaffenheit derselben fallen die Resultate für die Integrale D_v aus, und wir teilen jetzt einige für das Folgende wichtige Ergebnisse seither gemachter Untersuchungen mit.

An erster Stelle erwähnen wir die Poincarésche Differenzengleichung. Damit bezeichnet Herr Perron eine Differenzen-

gleichung, deren Koeffizienten für $\lim \nu = \infty$ bestimmte endliche Grenzwerte haben. Eine solche Gleichung liegt also vor, wenn in (1) die Koeffizienten den Bedingungen:

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} a_1^{(\nu)} = a_1, \quad \lim_{\nu=\infty} a_2^{(\nu)} = a_2 \ldots \lim_{\nu=\infty} a_r^{(\nu)} = a_r$$

genügen.

Diese Gleichungsart hat Poincaré zuerst untersucht (L. V. IV, 1).[1]) Doch sind, wie Herr Perron (L.-V. III, 1 u. 2) zeigte, seine Beweise und Ergebnisse nicht ganz exakt. Unter der Annahme $a_r^{(\nu)} \neq 0$ für alle ν, die Poincaré nicht brauchte, behandelte dann Herr Perron eingehend die Poincarésche Differenzengleichung und fand dabei folgendes:

Satz I. Bildet man die algebraische Gleichung r-ten Grades

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r = 0$$

(a_r darf auch $= 0$ sein)

und besitzt diese zur Poincaréschen Differenzengleichung gehörige „charakteristische" Gleichung der Reihe nach die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_r$ und ist

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_r|,$$

dann hat die Poincarésche Differenzengleichung r linear unabhängige Partikulärintegrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)} \ldots D_\nu^{(r)}$ der Art, daß die Beziehungen gelten:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}^{(i)}}{D_\nu^{(i)}} = \varrho_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r),$$

woraus für das allgemeine Integral D_ν die Relation:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_1$$

folgt (L.-V. III, 1).

Hat die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, dann gilt:

---

[1]) Unter L.-V. verweisen wir auf das am Anfang befindliche Literaturverzeichnis.

Satz II. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\beta$ die voneinander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, und ist allgemein n_γ die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ, wobei mehrfache Wurzeln ihrer Multiplizität entsprechend zu zählen sind, so daß

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_\beta = r$$

ist, dann hat die Poincarésche Differenzengleichung, sofern ihr letzter Koeffizient $a_r^{(v)}$ für alle v von Null verschieden ist, ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in β Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der γ-ten Klasse und deren lineare Verbindungen die Beziehung:

$$\limsup_{v=\infty} \sqrt[v]{|D_v|} = \alpha_\gamma$$

gilt. Die Anzahl der Integrale der γ-ten Klasse ist gleich n_γ (L.-V. III, 2).

Weiter läßt sich aus den Arbeiten (L.-V. III, 1 u. 2) des Herrn Perron, wie ich im § 7 beweisen werde, der folgende Satz schließen:

Satz III. Ist $D_v^{(j)}$ ein Integral, das für sich allein eine Klasse bildet, und ist ϱ_j die entsprechende Wurzel der charakteristischen Gleichung, dann gilt

$$\lim_{v=\infty} \frac{D_{v+1}^{(j)}}{D_v^{(j)}} = \varrho_j .$$

Daraus folgt aber ohne weiteres, daß auch für ein Integral D_v von der Form:

$$D_v = c_j D_v^{(j)} + c_{j+1} D_v^{(j+1)} + \cdots + c_r D_v^{(r)}$$

die Gleichung:

$$\lim_{v=\infty} \frac{D_{v+1}}{D_v} = \varrho_j$$

besteht, falls $c_j \neq 0$. Hiebei sind die α_i in Satz II der Größe nach geordnet gedacht:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\beta .$$

Über die Koeffizienten $a_i^{(v)}$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ war bisher lediglich vorausgesetzt, daß sie für $\lim v = \infty$ bestimmte endliche Grenzwerte haben. Herr Horn (L.-V. II, 1 u. 2) machte nun über die Art, wie die $a_i^{(v)}$ sich diesen Grenzwerten nähern, noch gewisse Voraussetzungen. Er nahm nämlich die Koeffizienten $a_i^{(v)}$ in Form konvergenter oder asymptotischer Reihen:

$$a_i + \frac{a_i'}{v} + \frac{a_i''}{v^2} + \cdots$$

an und zeigte dann, falls die Wurzeln ϱ_1, $\varrho_2 \ldots \varrho_r$ der charakteristischen Gleichung voneinander und von Null verschieden sind, die Möglichkeit einer asymptotischen Darstellung von r Fundamentalintegralen $D_v^{(1)}$, $D_v^{(2)} \ldots D_v^{(r)}$, aus der sich ebenfalls die Relation $\lim\limits_{v=\infty} \frac{D_{v+1}^{(i)}}{D_v^{(i)}} = \varrho_i$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ ergibt.

Wir führen jetzt noch einiges an über Differenzengleichungen mit Koeffizienten allgemeinerer Art, die Herr Perron in L.-V. III, 4 behandelte.

Man bezeichne mit dem Symbol $\{v^k\}$ jede für $v = 0, 1, 2 \ldots$ definierte (nicht notwendig reelle) Funktion, für die

$$\lim_{v=\infty} \frac{|\{v^k\}|}{v^k} = 1$$

ist, wobei k irgendeine reelle Zahl bedeutet, die mit der Funktion eindeutig gegeben ist; analog mit $\{v^\infty\}$ eine Funktion, deren Absolutwert rascher wächst als jede noch so große Potenz von v, endlich mit $\{v^{-\infty}\}$ eine Funktion, deren Absolutwert rascher gegen Null konvergiert als jede Potenz von $\frac{1}{v}$. Jede Funktion, die von einem bestimmten v-Wert ab dauernd gleich Null ist, ist demnach mit $\{v^{-\infty}\}$ zu bezeichnen.

Herr Perron wählt nun für die Koeffizienten $a_i^{(v)}$ die Form:

$$a_i^{(v)} = a_i \{v^{k_i}\} \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots r),$$

indem unter $a_0^{(\nu)} = 1$ der Koeffizient von $D_{\nu+r}$ verstanden ist, d. h. $a_0 = 1$, $k_0 = 0$. Hiebei darf $a_i \neq 0$ angenommen werden, da der Fall $a_i^{(\nu)} = 0$ durch $k_i = -\infty$ in Rechnung gesetzt wird. Für den Fall, daß $k_i < \infty$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ und $k_r > -\infty$, konstruiere man in einem rechtwinkligen X-Y-Koordinatensystem die Punkte P_0, P_1, $P_2 \ldots P_r$ mit den Koordinaten:

$$x = i, \quad y = k_i \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots r)$$

und umspanne sie mit einem nach der positiven Y-Achse konvexen Newton-Puiseuxschen Polygon. Dies ist ein die Punkte P_0 und P_r verbindender nach der positiven Y-Seite konvexer

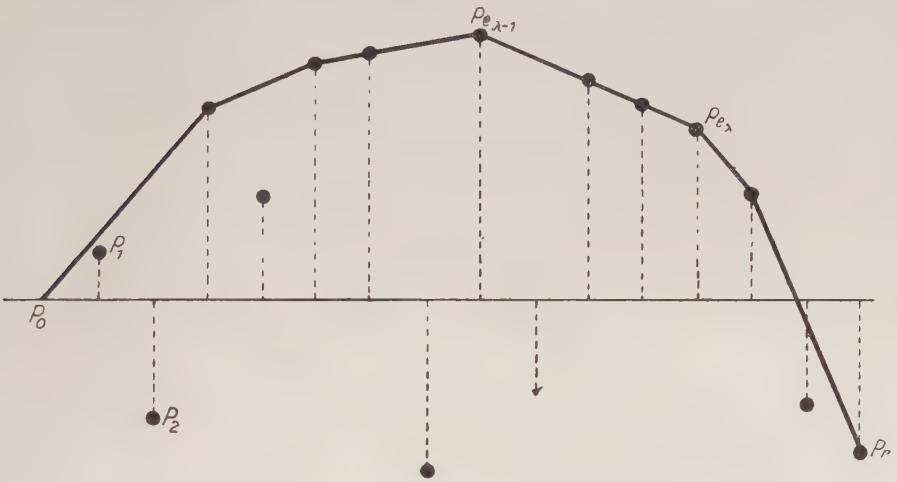

Fig. 1.

Streckenzug, der eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, daß jede Ecke einer der Punkte P_i ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen (vgl. Fig. 1).

Besitzt dieses Polygon die $\sigma + 1$ Ecken:

$$P_{e_0} = P_0, \; P_{e_1}, \; P_{e_2} \ldots P_{e_\sigma} = P_r,$$

dann hat die λ-te Seite $(\lambda = 1, 2 \ldots \sigma)$ den Richtungsfaktor:

$$q_\lambda = \frac{k_{e_\lambda} - k_{e_{\lambda-1}}}{e_\lambda - e_{\lambda-1}},$$

und es ist:

$$q_1 > q_2 > q_3 > \cdots > q_\sigma.$$

$e_\lambda - e_{\lambda-1}$ stellt die Abszissendifferenz der Endpunkte der λ-ten Seite vor.

Jeder Differenzengleichung mit den Koeffizienten $a_i^{(v)} = a_i\{v^{k_i}\}$ ist somit im Falle $k_i < \infty$, $k_r > -\infty$ mit dieser Konstruktion ein ganz bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon zugeordnet. Für ihre Integrale aber hat Herr Perron den Satz bewiesen:

Satz IV. Besitzt das zur Differenzengleichung gehörige Newton-Puiseuxsche Polygon σ Seiten, deren Richtungsfaktoren der Reihe nach $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ seien, dann hat die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, daß die Integrale der λ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen den Ungleichungen:

$|D_v| < M^v (v!)^{q_\lambda}$ für alle hinreichend großen v

$|D_v| > m^v (v!)^{q_\lambda}$ für unbegrenzt viele v

genügen. M und m sind hiebei von v unabhängige Konstanten. Die Anzahl der Integrale der λ-ten Klasse ($\lambda = 1, 2 \ldots \sigma$) ist $e_\lambda - e_{\lambda-1}$, und $a_r^{(v)} \neq 0$ für alle v.

Die seitherigen Betrachtungen ermöglichen es jetzt, die Aufgaben, die diese Arbeit lösen soll, zu formulieren.

§ 2.
Zweck dieser Arbeit.

Nach Satz IV gehört zu der Differenzengleichung:

$$D_{v+r} + a_1^{(v)} D_{v+r-1} + \cdots + a_r^{(v)} D_v = 0,$$

deren Koeffizienten den Bedingungen:

$$a_i^{(v)} = a_i\{v^{k_i}\} \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$
$$a_i \neq 0$$
$$a_r^{(v)} \neq 0 \text{ für alle } v$$
$$k_i < \infty, \; k_r > -\infty$$

genügen, ein ganz bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon. Hat dieses σ Seiten mit den Richtungsfaktoren $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ dann gilt für die Integrale der λ-ten Klasse:

$$|D_v| < M^v (v!)^{q_\lambda} \text{ für alle hinreichend großen } v$$

$$|D_v| > m^v (v!)^{q_\lambda} \text{ für unbegrenzt viele } v.$$

Daraus folgt, daß der

$$\limsup_{v=\infty} \frac{\left|\sqrt[v]{D_v}\right|}{(v!)^{\frac{q_\lambda}{v}}}$$

eine endliche von Null verschiedene Zahl ist. Wie groß aber diese Zahl ist und ob sie für alle Integrale ein und derselben Klasse den gleichen Wert annimmt, geht aus dem Bisherigen in keiner Weise hervor. Ja, es kann sehr wohl möglich sein, daß dieser obere Limes für die verschiedenen Integrale ein und derselben Klasse verschiedene Werte annimmt. Die Integrale ein und derselben Klasse würden also dann, je nach dem Wert dieses oberen Limes, in verschiedene Unterklassen zerfallen, und zwar derart, daß für die Integrale ein und derselben Unterklasse und ihre linearen Verbindungen der Wert von diesem oberen Limes gleich wäre.

Unter der Voraussetzung, daß erstens die Quotienten $\frac{a_i^{(v)}}{v^{k_i}}$ für $\lim v = \infty$ einen bestimmten Grenzwert haben (nicht bloß ihre absoluten Beträge), und daß zweitens das der Differenzengleichung entsprechende Newton-Puiseuxsche Polygon nur eine Seite, etwa mit dem Richtungsfaktor q, besitzt, ist nach dem früheren die Bestimmung dieses oberen Limes und damit der Unterklassen leicht ausführbar. Die Substitution:

$$D_v = (v!)^q E_v$$

führt nämlich die ursprüngliche Differenzengleichung über in die Poincarésche Differenzengleichung:

$$E_{v+r} + h_1^{(v)} E_{v+r-1} + \cdots + h_r^{(v)} E_v = 0,$$

wobei

$$h_i^{(v)} = \frac{a_i^{(v)}}{\{v^{iq}\}} \quad (i = 1, 2 \ldots r).$$

Je nach den Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung liefert dann Satz I, III oder II $\lim_{\nu=\infty} \frac{E_{\nu+1}}{E_\nu}$ oder wenigstens $\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|E_\nu|}$ und damit $\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^q D_\nu}$ oder $\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q}{\nu}}}$, woraus sich dann, weil

$$\left| \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^q D_\nu} \right| = \limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q}{\nu}}}$$

ist, die Unterklassen bestimmen lassen (s. auch § 3).

Setzt man aber ein beliebiges Newton-Puiseuxsches Polygon voraus, dann war es, auch bei noch so speziellen Wahlen der Größen $\frac{a_i^{(\nu)}}{\nu^{k_i}}$, bis vor kurzem nicht möglich, die Unterklassen genau anzugeben. Erst die kürzlich veröffentlichte Methode des Herrn Erb (L.-V. I, 1) läßt für ein beliebiges Polygon die Bestimmung der Unterklassen in gewissen Fällen zu. Herr Erb zeigt nämlich, daß in gewissen Fällen, die ich später angeben werde, bei Annahme der Größen $\frac{a_i^{(\nu)}}{\nu^{k_i}}$ in Form konvergenter oder asymptotischer Reihen: $a_i + \frac{a_i'}{\nu^{\frac{1}{a}}} + \frac{a_i''}{\nu^{\frac{2}{a}}} + \cdots$, wo a eine ganze positive Zahl ist, das Theorem des Herrn Horn über die asymptotische Darstellung der Integrale sich erweitern läßt, aus der sich dann die Unterklassen leicht ergeben.

Verstehen wir zum Unterschied von $\{\nu^{k_i}\}$ unter dem Symbol $[\nu^{k_i}]$ jede für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ definierte Funktion, für die schon

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{[\nu^{k_i}]}{\nu^{k_i}} = 1$$

ist. Tritt jetzt an Stelle von $\{\nu^{k_i}\}$ die Funktion $[\nu^{k_i}]$, dann war nach dem Bisherigen bei speziellen Annahmen von $[\nu^{k_i}]$, und auch dann nur in gewissen Fällen, die Bestimmung der Unterklassen für ein beliebiges Newton-Puiseuxsches Polygon möglich.

Für das Folgende setze ich nun ebenfalls voraus, daß an Stelle der Funktion $\{\nu^{k_i}\}$ die Funktion $[\nu^{k_i}]$ tritt, die aber im

übrigen ganz beliebig geartet sein darf. Dann zeige ich, wie sich für ein beliebiges Newton-Puiseuxsches Polygon stets die verschiedenen Werte von $\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_\lambda}{\nu}}}$ bestimmen, womit dann auch die Einteilung in Unterklassen gegeben ist. In gewissen Fällen läßt sich auch die Existenz des Grenzwerts $\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{q_\lambda} D_\nu}$ nachweisen. Die Differenzengleichung, die wir unsern weiteren Betrachtungen zugrunde legen, hat demnach die Form:

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0, \tag{3}$$

und ihre Koeffizienten genügen den Bedingungen:

$$a_i^{(\nu)} = a_i [\nu^{k_i}] \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$
$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$
$$a_i \neq 0$$
$$k_i < \infty, \; k_r > -\infty.$$

Ihr entspricht ein bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon etwa mit σ Seiten, mit den Richtungsfaktoren $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ und den Ecken:

$$P_{e_0} = P_0(0, 0), \; P_{e_1}(e_1, k_{e_1}), \; P_{e_2}(e_2, k_{e_2}) \ldots P_{e_\sigma} = P_r(r, k_r),$$

so daß:

$$q_\lambda = \frac{k_{e_\lambda} - k_{e_{\lambda-1}}}{e_\lambda - e_{\lambda-1}} \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots \sigma).$$

Wir treten damit an die eigentliche Lösung unserer Aufgabe heran, und zwar befassen wir uns zuerst mit der Bestimmung der Unterklassen der ersten Klasse.

§ 3.

Die Unterklassen der ersten Klasse.

Man setze:

$$D_\nu = (\nu!)^{q_1} E_\nu,$$

dann geht die Gleichung (3) über in die Gleichung:

$$E_{\nu+r} + h_1^{(\nu)} E_{\nu+r-1} + \cdots + h_r^{(\nu)} E_\nu = 0. \tag{4}$$

Hierbei ist:

$$h_i^{(v)} = \frac{a_i [v^{k_i}]}{[v^{i q_1}]} = a_i [v^{k_i - i q_1}] \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

und insbesondere

$$h_r^{(v)} \neq 0 \quad \text{für alle } v.$$

Da nun für alle Punkte i, k_i, die auf der ersten Polygonseite gelegen sind,

$$q_1 = \frac{k_i}{i},$$

also

$$k_i - i q_1 = 0,$$

für alle andern Punkte i, k_i, insbesondere für alle Punkte, für welche $i > e_1$, aber

$$q_1 > \frac{k_i}{i},$$

d. h.

$$k_i - i q_1 < 0$$

wird, so haben die $h_i^{(v)}$ für $\lim v = \infty$ bestimmte endliche Grenzwerte h_i, und zwar ist:

$$h_i \begin{cases} = a_i \text{ für die Werte i, für welche der Punkt i, } k_i \text{ auf der ersten Polygonseite liegt} \\ = 0 \text{ für die Werte i, für welche der Punkt i, } k_i \text{ nicht auf der ersten Polygonseite liegt.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt die letzte Gleichung für alle $i > e_1$. Demnach ist die Gleichung (4) eine Poincarésche mit der charakteristischen Gleichung:

$$x^r + h_1 x^{r-1} + \cdots + h_{e_1} x^{r-e_1} = 0, \tag{5}$$

wobei $h_{e_1} = a_{e_1} \neq 0$ ist.

Nach Satz II besitzt dann die Gleichung (4) r Fundamentalintegrale E_v, die gemäß den β voneinander verschiedenen absoluten Beträgen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\beta$ der Wurzeln von Gleichung (5) derart in β Klassen zerfallen, daß für die n_γ Integrale $E_v^{(*)}$ der γ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen $\limsup_{v=\infty} \sqrt[v]{|E_v^{(*)}|} = \alpha_\gamma$ wird. (n_γ = Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ). Den r Fundamentalintegralen von Gleichung (4) entsprechen aber r Fun-

damentalintegrale D_ν von Gleichung (3), und diese zerfallen somit auch in β Klassen, so daß für die Integrale $D_\nu^{(*)}$ der γ-ten Klasse gilt:

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu^{(*)}|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}} = \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|E_\nu^{(*)}|} = \alpha_\gamma .$$

Nun gehören nach Satz IV sämtliche Fundamentalintegrale D_ν von Gleichung (3), für welche $\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}}$ nicht gleich Null wird, zur ersten Polygonseite, denn für die Integrale D_ν, die der 2., 3. .... σ-ten Polygonseite entsprechen, wird ja:

$$\frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}} < M(\nu!)^{-\frac{d}{\nu}} \quad \text{für alle hinreichend großen } \nu,$$

wo d eine positive von Null verschiedene Zahl ist (für die Integrale, die zur zweiten Seite gehören, z. B. $q_1 - q_2$). Daraus aber folgt, daß die e_1 Integrale D_ν, für welche $\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}}$ gleich einem der absoluten Beträge der Wurzeln der Gleichung:

$$x^{e_1} + h_1 x^{e_1-1} + \cdots + h_{e_1} = 0 \qquad (h_{e_1} \neq 0)$$

ist, die Fundamentalintegrale von (3) sind, die zu der ersten Polygonseite gehören. Damit erhalten wir den Satz:

Satz: Der $\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}}$ der e_1 Integrale D_ν von Gleichung (3), die die erste Klasse bilden, nimmt β_1 verschiedene Werte an. Diese sind die β_1 voneinander verschiedenen absoluten Beträge $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\beta_1}$ der Wurzeln der Gleichung:

$$x^{e_1} + h_1 x^{e_1-1} + \cdots + h_{e_1} = 0.$$

Dabei ist

$$h_i \begin{cases} = a_i, \text{ wenn der Punkt } i, k_i \text{ auf der ersten Polygonseite liegt} \\ = 0, \text{ wenn der Punkt } i, k_i \text{ nicht auf der ersten Polygonseite liegt.} \end{cases}$$

Ist n_γ die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ, wobei mehrfache Wurzeln ihrer Multiplizität entsprechend zu zählen sind, dann zerfallen die e_1 Integrale der ersten Klasse von Gleichung (3) derart in β_1 Unterklassen, daß für die Integrale D_ν der γ-ten Unterklasse, deren Anzahl n_γ ist, und ihre linearen Verbindungen:

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{q_1}{\nu}}} = \alpha_\gamma$$

wird. Außerdem wird für jedes Integral, zu dem eine Wurzel ϱ der obigen Gleichung gehört, deren Multiplizität eins und deren absoluter Betrag $|\varrho|$ von den absoluten Beträgen der andern Wurzeln verschieden ist, sogar

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{q_1} D_\nu} = \varrho.$$

Der letzte Schluß ergibt sich nämlich ohne weiteres aus Satz III, angewandt auf die Gleichung (4).

§ 4.

Die Unterklassen einer beliebigen Klasse.

Ganz einfach ergaben sich nach § 3 die Unterklassen der ersten Klasse; wesentlich komplizierter wird die Bestimmung der Unterklassen, in die die Integrale einer beliebigen, etwa der λ-ten ($\lambda = 2, 3 \ldots \sigma$) Klasse zerfallen. Zu diesem Zweck setzen wir:

(6) $$D_\nu = (\nu!)^{q_\lambda} E_\nu .$$

Dann geht die Gleichung (3) über in die Gleichung:

(7) $$E_{\nu+r} + h_1^{(\nu)} E_{\nu+r-1} + \cdots + h_r^{(\nu)} E_\nu = 0.$$

Dabei ist

$$h_i^{(\nu)} = a_i \frac{\left[v^{k_i}\right]}{\left[v^{i q_\lambda}\right]} = a_i \left[v^{k_i - i q_\lambda}\right] = a_i \left[v^{s_i}\right] \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

und

$$h_r^{(\nu)} \neq 0 \text{ für alle } \nu.$$

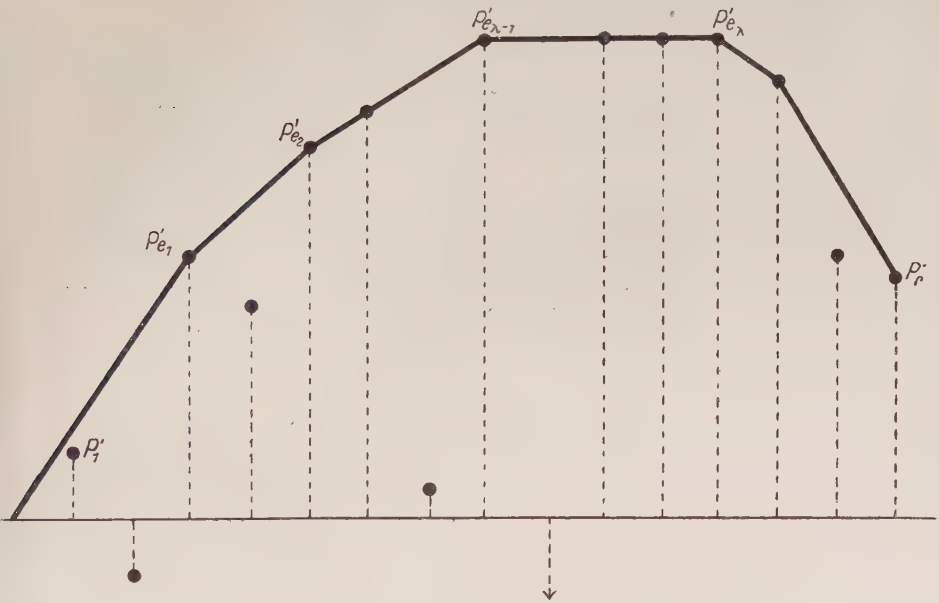

Fig. 2.

Zu Gleichung (7) gehört ein ganz bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon mit σ Seiten, und seine Eckpunkte: P_0, P_{e_1}', P_{e_2}' ... sind der Reihe nach festgelegt durch die Koordinaten:

$$e_0 = 0, 0;\ e_1, s_{e_1};\ e_2, s_{e_2};\ \ldots\ e_{\lambda-1}, s_{e_{\lambda-1}};\ e_\lambda, s_{e_\lambda};\ \ldots\ e_\sigma = r, s_r.$$

Aus der Definition der s_i aber folgt, daß die λ-te Seite dieses zu (7) gehörigen Polygons parallel zur X-Achse ist.

Die Substitution (6) hat so die λ-te Polygonseite gewisser-

maßen isoliert. Setzen wir von jetzt an der Zweckmäßigkeit wegen:

$$e_{\lambda-1} = e\,,$$

wobei $\lambda > 1$, also $e \geqq 1$, da der andere Fall in § 3 erledigt ist, dann gilt folgender Hilfssatz:

Satz V. Ist N ein genügend großer Wert von v, so läßt sich die linke Seite der Gleichung (7) für alle $v \geqq N$ identisch auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
&E_{v+r} + b_1^{(v+r-e)} E_{v+r-1} + \cdots + b_e^{(v+r-e)} E_{v+r-e} \\
&+ f_1^{(v)} \{ E_{v+r-1} + b_1^{(v+r-e-1)} E_{v+r-2} + \cdots \\
&\qquad + b_e^{(v+r-e-1)} E_{v+r-e-1} \} \\
&+ f_2^{(v)} \{ E_{v+r-2} + b_1^{(v+r-e-2)} E_{v+r-3} + \cdots \\
&\qquad + b_e^{(v+r-e-2)} E_{v+r-e-2} \} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ f_{r-e-1}^{(v)} \{ E_{v+e+1} + b_1^{(v+1)} E_{v+e} + \cdots \\
&\qquad + b_e^{(v+1)} E_{v+1} \} \\
&+ f_{r-e}^{(v)} \{ E_{v+e} + b_1^{(v)} E_{v+e-1} + \cdots + b_e^{(v)} E_v \}.
\end{aligned}$$

Dabei gelten für die Koeffizienten $b_i^{(v)}$ und $f_k^{(v)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ $(k = 1, 2 \ldots r-e)$ die folgenden Relationen:

$$b_i^{(v)} = c_i^{(v)}\, v^{t_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots e)$$

$$|c_i^{(v)}| < K_i \qquad \text{(endliche Schranke)}$$

$$t_i = \operatorname{Max}(s_0, s_1 \ldots s_i)\,,$$

außerdem für $i = e_1, e_2 \ldots e$ noch spezieller

$$b_i^{(v)} = a_i \left[v^{s_i} \right],$$

d. h.

$$\lim_{v=\infty} c_i^{(v)} = a_i\,.$$

Ferner ist

$$\lim_{v=\infty} f_k^{(v)} = f_k\,,$$

und zwar wird

$$f_k = \begin{cases} \frac{a_{e+k}}{a_e} \text{ für die Werte k, für welche der Punkt } (e+k,\ s_{e+k}) \text{ auf der } \lambda\text{-ten Polygonseite liegt} \\ 0 \text{ für die Werte k, für welche der Punkt } (e+k,\ s_{e+k}) \text{ nicht auf der } \lambda\text{-ten Polygonseite liegt;} \end{cases}$$

insbesondere gilt also $f_k = 0$ für alle $k > e_\lambda - e$.

Weiter ist noch $b_e^{(v)}$ und $f_{r-e}^{(v)} \neq 0$ für alle in Betracht kommenden v-Werte.

Die Gültigkeit dieses Hilfssatzes werden wir im § 5 nachweisen. Nehmen wir also Satz V als bewiesen an, dann führt die Substitution

$$E_{v+e} + b_1^{(v)} E_{v+e-1} + \cdots + b_e^{(v)} E_v = \Delta_v \tag{8}$$

die Gleichung (7) über in die Poincarésche Differenzengleichung:

$$\Delta_{v+r-e} + f_1^{(v)} \Delta_{v+r-e-1} + \cdots + f_{r-e}^{(v)} \Delta_v = 0. \tag{9}$$

Sie besitzt nach Satz II ein Fundamentalsystem von r—e Integralen $\Delta_v^{(i,\gamma)}$ $(i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 1,\ n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 2, \ldots n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + n_\gamma)$ $(\gamma = 1, 2, \ldots \beta)$ $(n_0 = 0)$, die gemäß den voneinander verschiedenen absoluten Beträgen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\beta$ der Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung, wobei $\alpha_1 > \alpha_2 \ldots > \alpha_\beta$ sein soll, derart in β Klassen zerfallen, daß für die n_γ Integrale $\Delta_v^{(i,\gamma)}$ der γ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen gilt:

$$\limsup_{v=\infty} \sqrt[v]{|\Delta_v^{(i,\gamma)}|} = \alpha_\gamma . \tag{10}$$

n_γ bedeutet dabei wieder die Zahl der ihrer Multiplizität entsprechend gezählten Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ, so daß

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_\beta = r - e$$

ist.

Ohne weiteres ist klar, daß jedes Partikulärintegral der inhomogenen Gleichung

$$E_{v+e} + b_1^{(v)} E_{v+e-1} + \cdots + b_e^{(v)} E_v = \Delta_v^{(i,\gamma)} \qquad v \geqq N \tag{11}$$

$$(i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 1, \ldots n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + n_\gamma),$$
$$(\gamma = 1, 2 \ldots \beta)$$

ein Integral von Gleichung (7) ist. Ein solches suchen wir darzustellen mittels der unendlichen Reihe:

$$(12)\quad E_{\nu}^{(i,\gamma)} = p_0^{(\nu)} \Delta_{\nu}^{(i,\gamma)} + p_1^{(\nu)} \Delta_{\nu+1}^{(i,\gamma)} + p_2^{(\nu)} \Delta_{\nu+2}^{(i,\gamma)} + \cdots \text{in inf.}$$

Hierbei ist immer $\nu \geqq N$ vorausgesetzt. Die fehlenden Werte $E_{N-1}^{(i,\gamma)}$, $E_{N-2}^{(i,\gamma)} \ldots E_0^{(i,\gamma)}$ lassen sich aber aus (7) bestimmen, da ja $h_r^{(\nu)} \neq 0$ für alle ν. Damit diese Darstellung überhaupt möglich ist, muß jedoch die Konvergenz der unendlichen Reihe (12) gewährleistet sein. Nun müssen die Koeffizienten $p_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)$ derart bestimmt werden, daß die Gleichung (11) identisch erfüllt wird. Dadurch ergeben sich, wie wir im § 6 zeigen, gewisse Bestimmungsgleichungen für die $p_\mu^{(\nu)}$. Insbesondere werden wir dort sehen, daß die $p_\mu^{(\nu)}$ den Ungleichungen:

$$\left|p_\mu^{(\nu)}\right| < \frac{d}{\nu^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s} \qquad (\mu = 0, 1, 2 \ldots)$$

Genüge leisten, wobei d, L, s von μ und ν unabhängige positive Zahlen sind.

Bedeutet τ eine beliebig kleine positive Zahl, dann besagt die Gleichung (10) doch gar nichts anderes als

$$\left|\Delta_{\nu}^{(i,\gamma)}\right| < (a_\gamma + \tau)^\nu \text{ für alle } \nu \geqq N'$$

$$\left|\Delta_{\nu}^{(i,\gamma)}\right| > (a_\gamma - \tau)^\nu \text{ für unbegrenzt viele } \nu\,^{1})$$

$$(i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 1, \ldots n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + n_\gamma), \quad (\gamma = 1, 2 \ldots \beta)$$

Die Zahl N' hängt dabei von der Wahl der Größe τ ab. Nun wird für $\nu \geqq N'$

$$\begin{aligned}\left|E_{\nu}^{(i,\gamma)}\right| &= \left|\sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(\nu)} \Delta_{\nu+\mu}^{(i,\gamma)}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \left|p_\mu^{(\nu)}\right| \left|\Delta_{\nu+\mu}^{(i,\gamma)}\right| \\ &< \frac{d}{\nu^{s_e}} (a_\gamma + \tau)^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} L^\mu (a_\gamma + \tau)^\mu (\mu!)^{-s} \\ &= \frac{d}{\nu^{s_e}} M (a_\gamma + \tau)^\nu,\end{aligned}$$

---

[1]) Für $a_\gamma = 0$ gilt die letzte Ungleichung nicht.

womit die Konvergenz der Reihe (12) nachgewiesen ist. Gleichzeitig aber folgt aus der letzten Ungleichung, daß

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|} \leqq \alpha_\gamma .$$

Wäre nun $\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|} < \alpha_\gamma$, also etwa $\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|} = \alpha$, wo $0 \leqq \alpha < \alpha_\gamma$ ist, dann wäre also, wenn wieder τ eine beliebig kleine positive Zahl ist:

$$\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right| < (\alpha + \tau)^\nu \text{ für alle hinreichend großen } \nu .$$

Aus der Gleichung (11) würde dann folgen:

$$\left|\Delta_\nu^{(i,\gamma)}\right| < C\, \nu^{se}\, (\alpha + \tau)^\nu ,$$

wo C eine Konstante ist. Es ließe sich daher für ein vorgegebenes positives τ_1 ein Wert N″ angeben von der Art, daß für alle $\nu \geqq N''$

$$\left|\Delta_\nu^{(i,\gamma)}\right| < (\alpha + \tau_1)^\nu .$$

Dies steht jedoch in offenbarem Widerspruch mit

$$\left|\Delta_\nu^{(i,\gamma)}\right| > (\alpha_\gamma - \tau)^\nu \text{ für unbegrenzt viele } \nu ,$$

da sich immer Werte τ und τ_1 finden lassen, für welche

$$\alpha + \tau_1 < \alpha_\gamma - \tau$$

wird. Daher ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|} = \alpha_\gamma .$$

Ist $\alpha_\gamma = 0$, dann ist offenbar

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|} = 0 .$$

Die Reihe (12) liefert somit r — e linear unabhängige Partikulärintegrale der Gleichung (7), für die der obere Limes der ν-ten Wurzel genau bekannt ist.

Betrachten wir jetzt die homogene lineare Differenzengleichung e-ter Ordnung:

$$(13) \quad E_{\nu+e} + b_1^{(\nu)} E_{\nu+e-1} + b_2^{(\nu)} E_{\nu+e-2} + \cdots + b_e^{(\nu)} E_\nu = 0 .$$

Ihr entspricht auf Grund von Satz IV ein ganz bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon, das aber nach Satz V bis zum Punkt (e, s_e) vollständig mit dem der Gleichung (7) übereinstimmt. Die Gleichung (13) besitzt somit ein Fundamentalsystem von e Integralen $E_v^{(j)}$ $(j = r - e + 1,\ r - e + 2, \dots r)$, die dasselbe infinitäre Verhalten zeigen wie die e Fundamentalintegrale von Gleichung (7) der 1., 2., 3., $\dots (\lambda - 1)$-ten Klasse. Diese e Integrale $E_v^{(j)}$ sind aber auch, wie sich ohne weiteres ergibt, Integrale der Gleichung (7), und wir zeigen jetzt, daß diese e Integrale $E_v^{(j)}$ mit den $r - e$ Integralen $E_v^{(i,\gamma)}$ zusammen ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7) bilden. Wäre nämlich, wenn wir der Einfachheit halber die $r - e$ Integrale

$$E_v^{(i,\gamma)} = E_v^{(k)} \qquad (k = 1, 2 \dots r - e)$$
$$(i = n_1 + \dots + n_{\gamma-1} + 1, \dots n_1 + \dots + n_\gamma)\ (\gamma = 1, 2 \dots \beta)$$

setzen, identisch für alle v:

$$\sum_{k=1}^{r} d_k E_v^{(k)} = 0, \tag{14}$$

wo d_k von v unabhängige Größen bedeuten, dann würde hieraus folgen:

$$\sum_{k=1}^{r} d_k E_{v+e}^{(k)} + b_1^{(v)} \sum_{k=1}^{r} d_k E_{v+e-1}^{(k)} + \dots + b_e^{(v)} \sum_{k=1}^{r} d_k E_v^{(k)} = 0,$$

d. h. es wäre

$$\sum_{k=1}^{r} d_k \left(E_{v+e}^{(k)} + b_1^{(v)} E_{v+e-1}^{(k)} + \dots + b_e^{(v)} E_v^{(k)} \right) = 0.$$

Weil aber die Integrale $E_v^{(k)}$ $(k = r - e + 1, r - e + 2, \dots r)$ Integrale von (13) sind, so kommt

$$\sum_{k=1}^{r-e} d_k \left(E_{v+e}^{(k)} + b_1^{(v)} E_{v+e-1}^{(k)} + \dots + b_e^{(v)} E_v^{(k)} \right) = 0,$$

d. h.

$$\sum_{k=1}^{r-e} d_k \Delta_v^{(k)} = 0,$$

was aber, da die $\Delta_v^{(k)}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung (9) sind, nur möglich ist, wenn

$$d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_{r-e} = 0.$$

Dann aber ergibt (14):

$$\sum_{k=r-e+1}^{r} d_k E_\nu^{(k)} = 0 .$$

Weil aber die $E_\nu^{(k)}$ $(k = r-e+1, r-e+2 \ldots r)$ Fundamentalintegrale von (13) sind, so folgt hieraus

$$d_{r-e+1} = d_{r-e+2} = \cdots = d_r = 0 ,$$

d. h. aber die r Integrale

$$E_\nu^{(i,\gamma)} \quad (i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 1, \ldots n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + n_\gamma)$$
$$(\gamma = 1, 2 \ldots \beta)$$

und

$$E_\nu^{(j)} \qquad (j = r-e+1, r-e+2, \ldots r)$$

bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (7).

Wie schon erwähnt, zerfallen die r Fundamentalintegrale der Gleichung (7) gemäß den σ Seiten des Polygons in σ Klassen. Davon werden diejenigen der 1., 2. ... $(\lambda-1)$-ten Klasse offenbar von den e Integralen $E_\nu^{(j)}$ $(j = r-e+1, \ldots r)$ gebildet. Einmal erfüllen sie, wie wir weiter oben gesehen haben, eben die von den Integralen der 1., 2. ... $(\lambda-1)$-ten Klasse verlangten Bedingungen, und dann sind sie die einzigen Integrale, die dies tun, was aus folgendem hervorgeht. Wäre nämlich $E_\nu^{(i,\gamma)}$ ein Integral der m-ten Klasse $(m = 1, 2, \ldots \lambda-1)$, dann müßte, wenn q'_m der Richtungsfaktor der m-ten Seite des zu (7) gehörigen Polygons wäre,

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\gamma)}\right|}}{(\nu!)^{\frac{q'_m}{\nu}}} > 0$$

sein, was offenbar nicht der Fall ist. Demnach gehören die r—e Integrale $E_\nu^{(i,\gamma)}$ der λ-ten, $(\lambda+1) \ldots \sigma$-ten Klasse an. Nun lautet die zu (9) gehörige charakteristische Gleichung:

$$x^{r-e} + f_1 x^{r-e-1} + \cdots + f_{e_\lambda - e} x^{r-e_\lambda} = 0 .$$

Sie besitzt also $r - e_\lambda$ Wurzeln Null, woraus folgt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\beta)}\right|} = 0 \qquad (i = e_\lambda - e + 1, e_\lambda - e + 2, \ldots r - e).$$

Nach Satz IV gehören aber die Fundamentalintegrale von (7),

für welche $\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|E_\nu^{(i,\beta)}\right|} = 0$, der $(\lambda+1)$, $(\lambda+2)$, ... σ-ten Klasse an, also stellen die $r-e_\lambda$ Integrale $E_\nu^{(i,\beta)}$ $(i = e_\lambda - e + 1, \ldots r - e)$ die Fundamentalintegrale der $(\lambda+1)$, $(\lambda+2)$, ... σ-ten Klasse vor. Damit aber können die Integrale $E_\nu^{(i,\gamma)}$ $(i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + 1, \ldots n_1 + n_2 + \cdots + n_{\gamma-1} + n_\gamma)$, $(\gamma = 1, 2 \ldots \beta - 1)$, $(n_0 = 0)$ nur die Integrale der λ-ten Klasse sein, deren charakteristische Gleichung somit

$$x^{e_\lambda - e} + f_1 x^{e_\lambda - e - 1} + \cdots + f_{e_\lambda - e} = 0 \qquad (f_{e_\lambda - e} \neq 0)$$

ist. Statt f_i schreiben wir gelegentlich $\frac{g_i}{g_0}$, wobei $g_0 = a_e$.

Bedenkt man, daß die Substitution (6) Punkte auf der λ-ten Seite des zu Gleichung (3) gehörigen Polygons in Punkte auf der λ-ten Seite des zu (7) gehörigen Polygons überführt, so tritt an Stelle des Satzes IV der folgende:

Satz VI. Liegt eine homogene lineare Differenzengleichung der Form (3) vor, und hat das zu ihr gehörige Newton-Puiseuxsche Polygon σ Seiten, deren Richtungsfaktoren der Reihe nach $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ sind, und dessen Eckpunkte die Abszissen $0 = e_0, e_1, e_2 \ldots e_\sigma = r$ haben, dann besitzt die Gleichung (3) ein Fundamentalsystem von r Integralen, die in σ Klassen zerfallen. Jede dieser Klassen aber zerfällt wieder in Unterklassen, und zwar zerfällt die λ-te Klasse $(\lambda = 1, 2 \ldots \sigma)$ derart in β_λ Unterklassen, daß für die n_γ Integrale D_ν der γ-ten Unterklasse und ihre linearen Verbindungen:

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{\sqrt[q_\lambda]{(\nu!)^\nu}} = \alpha_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2 \ldots \beta_\lambda)$$

wird. Hierbei sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\beta_\lambda}$ die voneinander verschiedenen und der Größe

nach geordneten absoluten Beträge der Wurzeln der für die Integrale der λ-ten Klasse charakteristischen Gleichung:

$$g_0 x^{e_\lambda - e_{\lambda-1}} + g_1 x^{e_\lambda - e_{\lambda-1}-1} + \cdots + g_{e_\lambda - e_{\lambda-1}} = 0,$$

wobei

$$g_i = \begin{cases} a_{e_{\lambda-1}+i} & \text{falls der Punkt } (e_{\lambda-1}+i, k_{e_{\lambda-1}+i}) \text{ auf der } \lambda\text{-ten Seite} \\ 0 & \text{nicht auf der } \lambda\text{-ten Seite} \end{cases}$$

des zu (3) gehörigen Polygons gelegen ist. n_γ bedeutet die Anzahl der ihrer Multiplizität entsprechend gezählten Wurzeln vom absoluten Betrag α_γ, so daß

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{\beta_\lambda} = e_\lambda - e_{\lambda-1}$$

ist.

Außerdem wird für jedes Integral der λ-ten Klasse, zu dem eine einfache Wurzel ϱ der charakteristischen Gleichung gehört, deren absoluter Betrag von den absoluten Beträgen der übrigen Wurzeln verschieden ist, sogar

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{q_\lambda} D_\nu} = \varrho .$$

Für $\lambda = 1$ ist die letzte Aussage schon in § 3 bewiesen worden, der Beweis für ihre Allgemeingültigkeit gestaltet sich folgendermaßen.

Ist ϱ eine Wurzel von der zuletzt genannten Eigenschaft, dann entspricht ihr nach Satz III ein Integral Δ_ν von Gleichung (9), für das die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu} = \varrho$$

statthat. Daraus folgt, daß von einem gewissen $\nu \geqq N'$ an gewiß $\Delta_\nu \neq 0$ ist und

$$\left| \frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu} \right| < |\varrho| + \varepsilon ,$$

also

$$\left|\frac{\Delta_{\nu+\mu}}{\Delta_\nu}\right| < (|\varrho|+\varepsilon)^\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots)$$

wird. Diesem Integral Δ_ν aber entspricht nach Gleichung (12) ein Integral:

$$E_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(\nu)} \Delta_{\nu+\mu} = p_0^{(\nu)} \Delta_\nu \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{p_\mu^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}} \frac{\Delta_{\nu+\mu}}{\Delta_\nu}\right).$$

Nun ist, wie später (S. 38) gezeigt wird,

$$p_0^{(\nu)} = \frac{1}{a_e\left(1+\varepsilon_e^{(\nu)}\right)\nu^{s_e}}$$

und

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_e^{(\nu)} = 0.$$

Ferner ist

$$\left|p_\mu^{(\nu)}\right| < \frac{d}{\nu^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s} \qquad (\mu = 1, 2 \ldots),$$

somit wird

$$\left|\frac{p_\mu^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}}\right| < d\, L^\mu (\mu!)^{-s} \left|a_e\right| \left|1+\varepsilon_e^{(\nu)}\right|,$$

folglich

$$\left|\frac{p_\mu^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}}\right| \left|\frac{\Delta_{\nu+\mu}}{\Delta_\nu}\right| < d\, L^\mu (\mu!)^{-s} \left|a_e\right| \left|1+\varepsilon_e^{(\nu)}\right| \left(|\varrho|+\varepsilon\right)^\mu$$

$$< d'\, L^\mu (\mu!)^{-s} \left(|\varrho|+\varepsilon\right)^\mu,$$

wo d' eine von μ und ν unabhängige Konstante ist. Setzt man

$$T_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{p_\mu^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}} \frac{\Delta_{\nu+\mu}}{\Delta_\nu} = \frac{p_1^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}} \frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu} + \cdots + \frac{p_n^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}} \frac{\Delta_{\nu+n}}{\Delta_\nu} + R_n,$$

so daß also

$$R_n = \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \frac{p_\mu^{(\nu)}}{p_0^{(\nu)}} \frac{\Delta_{\nu+\mu}}{\Delta_\nu},$$

dann ist

$$|R_n| < \frac{d' L^{n+1}(|\varrho|+\varepsilon)^{n+1}}{((n+1)!)^s}\left(1+\frac{L(|\varrho|+\varepsilon)}{(n+2)^s}+\frac{L^2(|\varrho|+\varepsilon)^2}{(n+2)^s(n+3)^s}+\cdots\right)$$

$$< \frac{d' L^{n+1}(|\varrho|+\varepsilon)^{n+1}}{((n+1)!)^s}\left(1+\frac{L(|\varrho|+\varepsilon)}{(n+2)^s}+\left(\frac{L(|\varrho|+\varepsilon)}{(n+2)^s}\right)^2+\cdots\right)$$

$$= \frac{d' L^{n+1}(|\varrho|+\varepsilon)^{n+1}}{((n+1)!)^s}\cdot\frac{1}{1-\frac{L(|\varrho|+\varepsilon)}{(n+2)^s}}.$$

Daher konvergiert die Reihe T_v gleichmäßig für alle v, und daraus folgt, daß man den Grenzwert der Reihe T_v für $\lim v = \infty$ dadurch erhält, daß man gliedweise die Grenzwerte bestimmt, vorausgesetzt, daß solche überhaupt existieren. Weil aber, wie ich in § 6 zeigen werde:

$$p_\mu^{(v)} = q_\mu^{(v)}(v+\mu)^{\vartheta_\mu} \cdot \qquad (\mu = 1, 2 \ldots)$$

ist, wo $q_\mu^{(v)}$ unter einer von v unabhängigen Schranke bleibt und $\vartheta_\mu < -s_e$ ist, so wird

$$\lim_{v=\infty} \frac{p_\mu^{(v)}}{p_0^{(v)}} \frac{\Delta_{v+\mu}}{\Delta_v} = \lim_{v=\infty} q_\mu^{(v)}(v+\mu)^{\vartheta_\mu} a_e\left(1+\varepsilon_e^{(v)}\right) v^{s_e} \frac{\Delta_{v+\mu}}{\Delta_v} = 0$$

und folglich $$\lim_{v=\infty} T_v = 0.$$

Daher wird auch $$\lim_{v=\infty} T_{v+1} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{E_{v+1}}{E_v} = \frac{p_0^{(v+1)}}{p_0^{(v)}} \frac{\Delta_{v+1}}{\Delta_v} \frac{1+T_{v+1}}{1+T_v},$$

woraus $$\lim_{v=\infty} \frac{E_{v+1}}{E_v} = \lim_{v=\infty} \frac{D_{v+1}}{v^{q_\lambda} D_v} = \varrho$$

folgt; w. z. b. w.

Hier möchte ich noch nachdrücklich auf den Zusammenhang der Resultate des Herrn Erb mit dem Satz VI hinweisen. Herr Erb erhält unter den weiter oben angegebenen Voraussetzungen über die Koeffizienten $a_j^{(v)}$ die nämlichen charakteristischen Gleichungen. Asymptotische Darstellungen der Integrale aber, und damit die Bestimmung der Unterklassen, kann er nur dann durchführen, wenn sämtliche Wurzeln der charakteristischen Gleichungen sowie ihre absoluten Beträge voneinander verschieden sind.

§ 5.

Beweis des Hilfssatzes V.

Soll die Identität:

$$\begin{aligned}
&E_{v+r} + h_1^{(v)} E_{v+r-1} + h_2^{(v)} E_{v+r-2} + \cdots + h_r^{(v)} E_v \\
&= E_{v+r} + b_1^{(v+r-e)} E_{v+r-1} + \cdots + b_e^{(v+r-e)} E_{v+r-e} \\
&+ f_1^{(v)} \{ E_{v+r-1} + b_1^{(v+r-e-1)} E_{v+r-2} + \cdots + b_e^{(v+r-e-1)} E_{v+r-e-1} \} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ f_{r-e}^{(v)} \{ E_{v+e} + b_1^{(v)} E_{v+e-1} + b_2^{(v)} E_{v+e-2} + \cdots + b_e^{(v)} E_v \}
\end{aligned}$$

von einem gewissen Wert $v \geqq N$ an bestehen, so müssen für alle Werte $v \geq N$ offenbar die folgenden Gleichungen befriedigt werden:

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned}
h_1^{(v)} &= b_1^{(v+r-e)} + f_1^{(v)} \\
h_2^{(v)} &= b_2^{(v+r-e)} + f_1^{(v)} b_1^{(v+r-e-1)} + f_2^{(v)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_i^{(v)} &= b_i^{(v+r-e)} + f_1^{(v)} b_{i-1}^{(v+r-e-1)} + f_2^{(v)} b_{i-2}^{(v+r-e-2)} + \cdots \\
&\qquad + f_{r-e}^{(v)} b_{i+e-r}^{(v)}{}^{1}) \qquad (i \leqq e) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_e^{(v)} &= b_e^{(v+r-e)} + f_1^{(v)} b_{e-1}^{(v+r-e-1)} + f_2^{(v)} b_{e-2}^{(v+r-e-2)} + \cdots \\
&\qquad + f_{r-e}^{(v)} b_{2e-r}^{(v)} \\
h_{e+1}^{(v)} &= f_1^{(v)} b_e^{(v+r-e-1)} + f_2^{(v)} b_{e-1}^{(v+r-e-2)} + \cdots + f_{r-e}^{(v)} b_{2e-r+1}^{(v)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_{r-i}^{(v)} &= f_{r-e-i}^{(v)} b_e^{(v+i)} + \sum_{k=1}^{i} f_{r-e-i+k}^{(v)} b_{e-k}^{(v+i-k)}{}^{2}) \quad (i \leqq r-e-1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_{r-1}^{(v)} &= f_{r-e-1}^{(v)} b_e^{(v+1)} + f_{r-e}^{(v)} b_{e-1}^{(v)} \\
h_r^{(v)} &= f_{r-e}^{(v)} b_e^{(v)}
\end{aligned} \right.$$

---

[1]) Hierbei setzen wir fest, daß die Koeffizienten $b_j^{(v+k)}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots r-e)$, bei denen der Index j einen negativen Wert annimmt, gleich Null, bei denen er den Wert Null annimmt, gleich Eins seien. Für den Fall daß $e \leqq r-e$ ist, enthält die rechte Seite der i-ten Gleichung $i+1$ Summanden; ist aber $e > r-e$, so enthält sie höchstens $r-e+1$ Summanden, wenn $i \leqq r-e$

Gemäß unsrer Forderung ist N der erste Wert von v, für den diese Gleichungen gelten sollen. Denken wir uns nun sämtliche Koeffizienten $b_i^{(N+k)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$, $(k = 0, 1, 2 \ldots r - e - 1)$ bereits bekannt und außerdem $b_e^{(N+k)} \neq 0$, so lassen sich offenbar aus den letzten $r - e$ Gleichungen die Größen $f_i^{(N)}$ $(i = 1, 2 \ldots r - e)$ bestimmen, indem man zunächst aus der letzten Gleichung $f_{r-e}^{(N)}$, dann aus der vorletzten $f_{r-e-1}^{(N)}$, schließlich aus der $(e+1)$-ten Gleichung $f_1^{(N)}$ berechnet. Aus den übrigen e ersten Gleichungen ergeben sich dann die $b_i^{(N+r-e)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$. Für den Wert N sind dann sämtliche Gleichungen (15) befriedigt. Wird hiebei $b_e^{(N+r-e)} \neq 0$, so lassen sich die $f_i^{(N+1)}$ $(i = 1, 2 \ldots r - e)$ und $b_i^{(N+r-e+1)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ ebenfalls bestimmen usw. Sobald also die $b_i^{(N+k)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ $(k = 0, 1, 2 \ldots r - e - 1)$ bekannt sind und bei der sukzessiven Berechnung der Koeffizienten $b_i^{(N+r-e)}$, $b_i^{(N+r-e+1)} \ldots$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ die Größen $b_e^{(N+r-e)}\, b_e^{(N+r-e+1)} \ldots \neq 0$ werden, lassen sich alle $b_i^{(\nu)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ und $f_j^{(\nu)}$ $(j = 1, 2 \ldots r - e)$ berechnen. Offenbar sind aber die $b_i^{(N+k)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$, $(k = 0, 1, 2 \ldots r - e - 1)$ willkürlich. Um sie passend zu wählen, müssen zunächst noch einige Zahlen definiert werden.

Es sei ε eine kleine positive Größe, die der Bedingung $\varepsilon < \frac{1}{2}$ genüge. Wir setzen:

$$G = \operatorname*{Max}_{i=1}^{r-e} \left| \frac{a_{e+i}}{a_e} \right| (1 + 6\varepsilon) \tag{16}$$

und definieren gewisse Zahlen K_i, K durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = K_0 \\ |a_1|\,(1+\varepsilon) + G K_0 = K_1 \\ |a_2|\,(1+\varepsilon) + G(K_0 + K_1) = K_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |a_i|\,(1+\varepsilon) + G(K_0 + K_1 + \cdots K_{i-1}) = K_i \quad (i = 1, 2 \ldots e) \\ K = \operatorname{Max} K_i\,. \end{array}\right. \tag{17}$$

---

jedoch $i + 1$ Summanden. Für beide Fälle enthält also die rechte Seite der i-ten Gleichung $\operatorname{Min}(r - e + 1,\ i + 1)$ Summanden.

[2]) Für Indices ≤ 0 gelte die frühere Bemerkung. Die Anzahl der Summanden ist $\operatorname{Min}(e + 1,\ i + 1)$.

Ferner sei

$$
(18)\quad \begin{cases}
\left|\frac{a_r}{a_e}\right|(1+6\varepsilon) = S_{r-e} \\
\left|\frac{a_{r-1}}{a_e}\right|(1+6\varepsilon) + \frac{1+2\varepsilon}{|a_e|} S_{r-e} K_{e-1} = S_{r-e-1} \\
\left|\frac{a_{r-2}}{a_e}\right|(1+6\varepsilon) + \frac{1+2\varepsilon}{|a_e|}(S_{r-e-1} K_{e-1} + S_{r-e} K_{e-2}) \\
\qquad\qquad = S_{r-e-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\frac{a_{r-i}}{a_e}\right|(1+6\varepsilon) + \frac{1+2\varepsilon}{|a_e|}\sum_{k=1}^{i} S_{r-e-i+k} K_{e-k} = S_{r-e-i} \\
\qquad\qquad (i = 1, 2 \ldots r-e-1) \\
S = \operatorname*{Max}_{i=1}^{r-e} S_i .
\end{cases}
$$

Für Indices $\leqq 0$ gelte die frühere Bemerkung.

Nun gehört zu der Gleichung (7) ein bestimmtes Newton-Puiseuxsches Polygon. Hievon fassen wir den Teil ins Auge, der bis zum Punkt $(e = e_{\lambda-1},\ s_e)$ reicht. Die Ecken dieses Teilpolygons sind gegeben durch die Koordinaten:

$$0 = e_0,\ 0;\ e_1, s_{e_1};\ e_2, s_{e_2};\ \ldots\ e_{\lambda-1} = e,\ s_e .$$

Ferner ist

$$s_e = s_{e_\lambda} > \operatorname{Max}(s_0, s_1 \ldots s_{e_{\lambda-1}-1}, s_{e_\lambda+1} \ldots s_r).$$

Damit können die willkürlichen Koeffizienten $b_i^{(N+k)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$, $(k = 0, 1, 2 \ldots r-e-1)$ zweckmäßig festgelegt werden. Wir setzen nämlich

$$
(19)\quad \begin{cases}
b_0^{(N+k)} = 1 \\
b_i^{(N+k)} = c_i^{(N+k)} (N+k)^{t_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots e) \\
\left.\begin{aligned} c_i^{(N+k)} &= a_i\left(1+\varepsilon_i^{(N+k)}\right) \\ t_i &= s_i \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}(i = e_1,\ e_2 \ldots e) \\ (k = 0, 1, 2 \ldots r-e-1)\end{array} \\
\left|\varepsilon_i^{(N+k)}\right| < \varepsilon \\
\left.\begin{aligned} \left|c_i^{(N+k)}\right| &\leqq K_i \\ t_i &= \operatorname{Max}(s_0, s_1 \ldots s_i) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}(i = \text{alle Werte von 0 bis e} \\ \text{außer } e_1,\ e_2 \ldots e).\end{array}
\end{cases}
$$

Es ist einleuchtend, daß die Größen $c_i^{(N+k)}$ und t_i $(i = e_1, e_2 \ldots e)$ auch den letzten Bedingungen genügen.

Es erübrigt sich noch die passende Wahl der Zahl N. Hiezu ist folgendes vorauszuschicken. Ist z eine positive Zahl $> r$ und

$$z_1 = \text{Max}\,(e,\ r - e),$$

so genügt offenbar die Zahl

$$\vartheta = \frac{z_1}{z}$$

den Bedingungen

$$0 < \vartheta < 1.$$

Nach Definition ist unter $h_i^{(\nu)}$ $(i = 1, 2 \ldots r)$ eine Funktion zu verstehen, für die gilt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{h_i^{(\nu)}}{\nu^{s_i}} = a_i.$$

Weil aber

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu^{s_i}}{(\nu+l)^{s_i}} = 1 \quad (l = 0, 1, 2 \ldots r - e),$$

so ist auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{h_i^{(\nu)}}{(\nu+l)^{s_i}} = a_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots r \\ l = 0, 1, 2 \ldots r - e \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt aber

$$h_i^{(\nu)} = a_i \left(1 + \delta_{i,l}^{(\nu)}\right) (\nu + l)^{s_i},$$

wobei

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_{i,l}^{(\nu)} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots r),\ (l = 0, 1, 2 \ldots r - e).$$

Ferner setzen wir

$$\sigma_j^{(\nu)} = \frac{1 + 2\varepsilon}{\underset{j=1}{\overset{r}{\text{Min}}} |a_j|} S \cdot K \frac{(\nu + r)^{t_j - 1}}{\nu^{s_j}} \qquad (j = e_1,\ e_2 \ldots e).$$

Dann ist offenbar

$$\lim_{\nu=\infty} \sigma_j^{(\nu)} = 0.$$

Endlich sei noch

$$(20) \qquad \begin{cases} g_{r-e} = s_r - s_e \\ g_{r-e-j} = \underset{k=1}{\overset{j}{\text{Max}}} (s_{r-j} - s_e,\ t_{e-k} - s_e). \end{cases}$$
$$(j = 1, 2 \ldots r - e - 1).$$

Hiebei soll $t_{e-k}\begin{cases}=0\\=-\infty\end{cases}$ sein, wenn $(e-k)\begin{cases}=0\\<0\end{cases}$ ist. Nun wählen wir N derart, daß für alle $v \geqq N$ die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$|\delta_{i,l}^{(v)}| < \frac{\vartheta}{2}\varepsilon \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \dots r \\ l = 0, 1 \dots r - e \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$|\sigma_j^{(v)}| < \frac{\varepsilon}{2z} \quad (j = e_1, e_2 \dots e), \tag{22}$$

$$S v^{\operatorname{Max} g_k} < G \quad \begin{pmatrix} k = \text{den Werten von 1 bis } (r-e), \\ \text{für welche der Punkt } (e+k, \\ s_{e+k}) \text{ nicht auf der isolierten} \\ \text{Seite liegt, so daß gewiß } g_k < 0 \text{ ist} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Damit können jetzt die $f_i^{(N)}$ $(i = 1, 2 \dots r - e)$ bestimmt werden. Aus der r-ten Gleichung des Systems (15) folgt:

$$f_{r-e}^{(N)} = \frac{h_r^{(N)}}{b_e^{(N)}} = \frac{a_r\left(1 + \delta_{r,0}^{(N)}\right) N^{s_r}}{a_e\left(1 + \varepsilon_e^{(N)}\right) N^{s_e}}.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\left(1 + \varepsilon_i^{(N+k)}\right)^{-1} = 1 + k_i^{(N+k)} \quad \begin{pmatrix} i = e_1, e_2 \dots e \\ k = 0, 1, 2 \dots r - e - 1 \end{pmatrix},$$

so wird

$$|k_i^{(N+k)}| < 2\varepsilon$$

und man erhält

$$f_{r-e}^{(N)} = \frac{a_r}{a_e} N^{s_r - s_e}\left(1 + \delta_{r,0}^{(N)} + k_e^{(N)} + \delta_{r,0}^{(N)} k_e^{(N)}\right),$$

woraus nach Gleichung (20)

$$f_{r-e}^{(N)} = \frac{a_r}{a_e} N^{g_r - e}\left(1 + \tau_{r-e}^{(N)}\right),$$

wo

$$|\tau_{r-e}^{(N)}| < \frac{\vartheta}{2}\varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon < 5\varepsilon.$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden, nämlich

1. Fall: $g_{r-e} = 0$.

Dies tritt ein, wenn die letzte Seite des zu Gleichung (7) gehörigen Polygons isoliert ist. Man hat dann:

$$f_{r-e}^{(N)} = \frac{a_r}{a_e}\left(1 + \tau_{r-e}^{(N)}\right)$$

$$\left|\tau_{r-e}^{(N)}\right| < 5\varepsilon.$$

2. Fall: $g_{r-e} < 0.$

Dies ist der Fall, wenn nicht die letzte Polygonseite isoliert wurde. Es kommt dann:

$$f_{r-e}^{(N)} = d_{r-e}^{(N)} N^{g_{r-e}},$$

wo

$$\left|d_{r-e}^{(N)}\right| < S_{r-e}.$$

Die letzte Gleichung umfaßt offenbar beide Fälle.

Aus der $(r-1)$-ten Gleichung des Systems (15) ergibt sich:

$$f_{r-e-1}^{(N)} = \frac{h_{r-1}^{(N)}}{b_e^{(N+1)}} - \frac{f_{r-e}^{(N)}\, b_{e-1}^{(N)}}{b_e^{(N+1)}}$$

$$= \frac{a_{r-1}}{a_e}(N+1)^{s_{r-1}-s_e}\cdot\left(1+\delta_{r-1,1}^{(N)}\right)\left(1+k_e^{(N+1)}\right)$$

$$- \frac{1+k_e^{(N+1)}}{a_e} d_{r-e}^{(N)} N^{g_{r-e}} c_{e-1}^{(N)} N^{t_{e-1}} (N+1)^{-s_e}.$$

Zwei Fälle können wieder eintreten, nämlich

1. Fall: $s_{r-1} - s_e = 0.$

Dies gilt, wenn der Punkt $(r-1,\ s_{r-1})$ auf der isolierten Polygonseite liegt. Dann ist:

$$f_{r-e-1}^{(N)} = \frac{a_{r-1}}{a_e}\left(1 + \delta_{r-1,1}^{(N)} + k_e^{(N+1)} + \delta_{r-1,1}^{(N)} k_e^{(N+1)}\right.$$

$$\left. - \frac{1+k_e^{(N+1)}}{a_{r-1}} d_{r-e}^{(N)} c_{e-1}^{(N)} N^{g_{r-e}+t_{e-1}} (N+1)^{-s_e}\right)$$

oder abgekürzt:

$$f_{r-e-1}^{(N)} = \frac{a_{r-1}}{a_e}\left(1 + \tau_{r-e-1}^{(N)}\right).$$

Dabei wird

$$\left|\tau_{r-e-1}^{(N)}\right| < 5\varepsilon + \frac{1+2\varepsilon}{\underset{i=1}{\overset{r}{\mathrm{Min}}}\,|a_i|} S_{r-e} K_{e-1} \frac{N^{t_e-1}}{(N+1)^{s_e}} < 5\varepsilon + \sigma_e^{(N)} < 6\varepsilon.$$

2. Fall: $s_{r-1} - s_e < 0$.

Dann liegt der Punkt $(r-1,\ s_{r-1})$ nicht auf der isolierten Polygonseite, und es kommt mit Gleichung (20)

$$f^{(N)}_{r-e-1} = (N+1)^{g_{r-e-1}} \left(\frac{a_{r-1}}{a_e} \left(1 + \delta^{(N)}_{r-1,1}\right) \left(1 + k_e^{(N+1)}\right) (N+1)^{s_{r-1} - s_e - g_{r-e-1}} \right.$$

$$\left. - \frac{1 + k_e^{(N+1)}}{a_e} d^{(N)}_{r-e} c^{(N)}_{e-1} N^{g_{r-e}} N^{t_{e-1}} (N+1)^{-(s_e + g_{r-e-1})} \right)$$

$$= d^{(N)}_{r-e-1} (N+1)^{g_{r-e-1}}.$$

Dabei wird

$$| d^{(N)}_{r-e-1} | < \left| \frac{a_{r-1}}{a_e} \right| (1 + 5\varepsilon)$$

$$+ \frac{1 + 2\varepsilon}{|a_e|} S_{r-e} K_{e-1} (N+1)^{t_{e-1} - s_e - g_{r-e-1}}$$

$$< S_{r-e-1}.$$

Der letzten Ungleichung wird offenbar in beiden Fällen genügt.

Wir zeigen jetzt, daß allgemein gilt:

(24) $$f^{(N)}_{r-e-j} = d^{(N)}_{r-e-j} (N+j)^{g_{r-e-j}} \quad (j = 0, 1, 2 \ldots r-e-1),$$

wobei für alle j

(24 a) $$| d^{(N)}_{r-e-j} | < S_{r-e-j}$$

und spezieller

(24 b)
$$\left\{ \begin{array}{ll} d^{(N)}_{r-e-j} = \dfrac{a_{r-j}}{a_e} \left(1 + \tau^{(N)}_{r-e-j}\right) & \\ | \tau^{(N)}_{r-e-j} | < 6\varepsilon & \text{für alle Werte j, für welche der Punkt } (r-j,\ s_{r-j}) \text{ auf der isolierten Polygonseite gelegen ist.} \\ g_{r-e-j} = 0 & \end{array} \right.$$

(24 c) $$g_{r-e-j} < 0$$ für diejenigen Werte j, für die der Punkt $(r-j,\ s_{r-j})$ nicht auf der isolierten Polygonseite liegt, also jedenfalls für $j < r - e_\lambda$.

Für den Fall $j = 0, 1$ ist die Sache eben nachgewiesen worden, die Allgemeingültigkeit ergibt sich mittels vollständiger Induktion. Wir nehmen also an, die Gleichung (24) sei erfüllt

für kleinere Werte von j, dann folgt aus der (r — j)-ten Gleichung des Systems (15)

$$f^{(N)}_{r-e-j} = \frac{h^{(N)}_{r-j}}{b^{(N+j)}_{e}} - \frac{1}{b^{(N+j)}_{e}} \sum_{k=1}^{j} f^{(N)}_{r-e-j+k}\, b^{(N+j-k)}_{e-k}$$

$$= \frac{a_{r-j}}{a_e} (N+j)^{s_r - j - s_e} \left(1 + \delta^{(N)}_{r-j,\,j}\right) \left(1 + k^{(N+j)}_{e}\right)$$

$$- \frac{1 + k^{(N+j)}_{e}}{a_e (N+j)^{s_e}} \sum_{k=1}^{j} f^{(N)}_{r-e-j+k}\, b^{(N+j-k)}_{e-k}.$$

Zwei Fälle müssen unterschieden werden, nämlich

1. Fall: $\qquad s_{r-j} - s_e = 0.$

Dies tritt ein, wenn der Punkt $(r - j,\ s_{r-j})$ auf der isolierten Polygonseite gelegen ist. Man bekommt dann:

$$f^{(N)}_{r-e-j} = \frac{a_{r-j}}{a_e} \Bigg(1 + \delta^{(N)}_{r-j,\,j} + k^{(N+j)}_{e} + \delta^{(N)}_{r-j,\,j}\ k^{(N+j)}_{e}$$

$$- \frac{1 + k^{(N+j)}_{e}}{a_{r-j} (N+j)^{s_e}} \sum_{k=1}^{j} f^{(N)}_{r-e-j+k}\, b^{(N+j-k)}_{e-k} \Bigg).$$

Setzt man:

$$(25) \quad \tau^{(N)}_{r-e-j} = \delta^{(N)}_{r-j,\,j} + k^{(N+j)}_{e} + \delta^{(N)}_{r-j,\,j} \cdot k^{(N+j)}_{e}$$

$$- \frac{1 + k^{(N+j)}_{e}}{a_{r-j}} \sum_{k=1}^{j} d^{(N)}_{r-e-j+k}\, c^{(N+j-k)}_{e-k} (N+j-k)^{g_{r-e-j+k} + t_{e-k}} (N+j)^{-s_e}$$

so wird

$$|\tau^{(N)}_{r-e-j}| < 5\varepsilon + \frac{1 + 2\varepsilon}{|a_{r-j}|} \sum_{k=1}^{j} S_{r-e-j+k}\, K_{e-k}\, (N+j)^{t_{e-k} - s_e}$$

$$< 5\varepsilon + j\,\sigma^{(N+j)}_{e} < 6\varepsilon.$$

2. Fall: $\qquad s_{r-j} - s_e < 0.$

Dies hat statt, wenn der Punkt $(r - j,\ s_{r-j})$ nicht auf der isolierten Polygonseite gelegen ist, und es wird mit Gleichung (20)

$$f^{(N)}_{r-e-j} = d^{(N)}_{r-e-j} (N+j)^{g_{r-e-j}},$$

wobei

$$(26) \quad d^{(N)}_{r-e-j} = \frac{a_{r-j}}{a_e} \left(1 + \delta^{(N)}_{r-j,\,j}\right) \left(1 + k^{(N+j)}_{e}\right) (N+j)^{s_{r-j} - (s_e + g_{r-e-j})}$$

$$- \frac{1 + k^{(N+j)}_{e}}{a_e} \sum_{k=1}^{j} d^{(N)}_{r-e-j+k}\, c^{(N+j-k)}_{e-k} (N+j-k)^{g_{r-e-j+k} + t_{e-k}} (N+j)^{-(s_e + g_{r-e-j})}$$

Daraus aber folgt:

$$|d^{(N)}_{r-e-j}| < \left|\frac{a_{r-j}}{a_e}\right|(1+5\varepsilon)+\frac{1+2\varepsilon}{|a_e|}\sum_{k=1}^{j} S_{r-e-j+k}\,K_{e-k} < S_{r-e-j}$$

und zwar umfaßt diese Ungleichung beide Fälle.

Damit ist aber die Allgemeingültigkeit der Gleichung (24) nachgewiesen, wenn wir noch bedenken, daß $(e_\lambda,\ s_{e_\lambda})$ der letzte auf der isolierten Polygonseite gelegene Punkt ist.

Jetzt können auch die $b_i^{(N+r-e)}$ $(i = 1, 2 \ldots e)$ bestimmt werden; wir erhalten nämlich aus der i-ten Gleichung $(i \leqq e)$ des Systems (15)

$$b_i^{(N+r-e)} = h_i^{(N)} - \sum_{k=1}^{i} f_k^{(N)}\, b_{i-k}^{(N+r-e-k)} \qquad (i = 1, 2 \ldots e).$$

Dabei setzen wir fest, daß $f_k^{(N)} = 0$ für $k > r - e$. Setzt man die Werte ein, so kommt:

$$b_i^{(N+r-e)} = a_i\left(1+\delta^{(N)}_{i,\,r-e}\right)(N+r-e)^{s_i} - \sum_{k=1}^{i} d_k^{(N)}\, c_{i-k}^{(N+r-e-k)}\,(N+r-e-k)^{g_k+t_{i-k}},$$

wobei auch $d_k^{(N)} = 0$ für $k > r - e$.

Nun können wieder zwei Fälle eintreten, nämlich:

1. Fall. i ist die Abszisse eines Eckpunktes des zu (7) gehörigen Polygons. Dann ist, wie sich ohne weiteres ergibt:

$$s_i > \operatorname*{Max}_{k=1}^{i} t_{i-k},$$

und man erhält:

$$b_i^{(N+r-e)} = a_i\,(N+r-e)^{s_i}\left(1+\varepsilon_i^{(N+r-e)}\right),$$

wo

$$\varepsilon_i^{(N+r-e)} = \delta^{(N)}_{i,\,r-e} - \frac{1}{a_i}\sum_{k=1}^{i} d_k^{(N)}\, c_{i-k}^{(N+r-e-k)}\,(N+r-e-k)^{g_k+t_{i-k}}\,(N+r-e)^{-s_i}.$$

Daraus folgt, da $g_k \leqq 0$, ohne weiteres

$$|\varepsilon_i^{(N+r-e)}| < \frac{\vartheta\varepsilon}{2} + \frac{1}{\underset{i=1}{\overset{r}{\mathrm{Min}}}\,|a_i|}\sum_{k=1}^{i} S_k\, K_{i-k}\,\frac{(N+r-e-k)^{t_i-k}}{(N+r-e)^{s_i}}$$

$$< \frac{\vartheta}{2}\varepsilon + e\,\sigma_i^{(N+r-e)} < \frac{\vartheta}{2}\varepsilon + \frac{z_1}{2z}\varepsilon = \frac{\vartheta}{2}\varepsilon + \frac{\vartheta}{2}\varepsilon = \vartheta\varepsilon$$

$$(i = e_1,\ e_2 \ldots e).$$

Daher ist insbesondere $b_e^{(N+r-e)} \neq 0$.

2. Fall. i ist keine Eckpunktsabszisse, dann ist:

$$b_i^{(N+r-e)} = (N+r-e)^{t_i}\left(a_i\left(1+\delta_{i,\,r-e}^{(N)}\right)(N+r-e)^{s_i-t_i} - \sum_{k=1}^{i} d_k^{(N)}\, c_{i-k}^{(N+r-e-k)}\,\frac{(N+r-e-k)^{g_k+t_i-k}}{(N+r-e)^{t_i}}\right)$$

$$= c_i^{(N+r-e)}\,(N+r-e)^{t_i}.$$

Hiebei ist:

$$|c_i^{(N+r-e)}| < |a_i|\left(1+\frac{\vartheta}{2}\varepsilon\right) + \sum_{k=1}^{i} |d_k^{(N)}|\,(N+r-e-k)^{g_k}\,K_{i-k}.$$

Ist nun:

$g_k = 0$, dann ist nach Gleichung (24)

$$|d_k^{(N)}| = \left|\frac{a_{e+k}}{a_e}\right|\,|1+\tau_k^{(N)}| < \left|\frac{a_{e+k}}{a_e}\right|(1+6\varepsilon) < G$$

nach Gleichung (16).

Ist aber:

$$g_k < 0,$$

dann wird nach Gleichung (24) und (23):

$$|d_k^{(N)}|\,(N+r-e-k)^{g_k} < S\,(N+r-e-k)^{g_k} < G,$$

so daß also jedenfalls:

$$|c_i^{(N+r-e)}| < |a_i|\left(1+\frac{\vartheta}{2}\varepsilon\right) + \sum_{k=1}^{i} G\,K_{i-k} < K_i$$

($i =$ sämtlichen Werten von 1 bis e außer $e_1, e_2 \ldots e$)

Es genügen also die $b_i^{(N+r-e)}$ genau denselben Bedingungen wie die $b_i^{(N+k)}$ $(1 = 1, 2 \ldots e)$, $(k = 0, 1, 2 \ldots r-e-1)$. Er-

setzen wir jetzt N durch $N+1$, so ergeben sich in analoger Weise die $f_j^{(N+1)}$ und damit auch die $b_i^{(N+r-e+1)}$ $(j=1,2\ldots r-e)$, $(i=1,2\ldots e)$. Da aber offenbar auch $b_e^{(N+r-e+1)} \neq 0$ wird, so läßt sich das Verfahren für $N+2$ fortsetzen. Weil wieder $b_e^{(N+r-e+2)} \neq 0$, geht die Sache auch für $N+3$. So weiterschließend ergibt sich die Gültigkeit der Gleichungen (19) und (24) für N, $N+1$, $N+2\ldots$, so daß wir also schreiben können:

$$(27) \qquad f_j^{(v)} = d_j^{(v)}\,(v+r-e-j)^{g_j} \qquad v = N,\ N+1,\ N+2\ldots,$$

wobei

$$(27a)\quad \left\{\begin{aligned} d_j^{(v)} &= \frac{a_{e+j}}{a_e}\left(1+\tau_j^{(v)}\right)\\ g_j &= 0\\ \tau_j^{(v)} &= \delta^{(v)}_{e+j,\,r-e-j} + k_e^{(v+r-e-j)} + \delta^{(v)}_{e+j,\,r-e-j}\,k_e^{(v+r-e-j)}\\ &\quad - \frac{1+k_e^{(v+r-e-j)}}{a_{e+j}} \sum_{k=1}^{j} d_{j+k}^{(v)}\, c_{e-k}^{(v+r-e-j-k)}\\ &\quad \times (v+r-e-j-k)^{g_{j+k}+t_{e-k}}\,(v+r-e-j)^{-s_e} \end{aligned}\right.$$

wird für solche Werte j von 1 bis $r-e$, für die der Punkt $(e+j,\ s_{e+j})$ auf der isolierten Polygonseite gelegen ist. Für alle übrigen Werte j gilt:

$$|\,d_j^{(v)}\,| < S_j$$
$$g_j < 0.$$

Daraus folgt aber, daß für diese Werte j, für die also der Punkt $(e+j,\ s_{e+j})$ nicht auf der isolierten Polygonseite gelegen ist:

$$\lim_{v=\infty} f_j^{(v)} = 0$$

ist, und das gilt jedenfalls für alle $j > e_\lambda - e$.

Weiter können wir schreiben:

$$(28) \qquad b_i^{(v)} = c_i^{(v)}\, v^{t_i} \qquad v = N,\ N+1\ldots,$$

und zwar ist:

$$(28a)\quad \left\{\begin{aligned} c_i^{(v)} &= a_i\left(1+\varepsilon_i^{(v)}\right)\\ t_i &= s_i \end{aligned}\right\} \text{ für } i = e_1,\ e_2\ldots e.$$

$$\left\{\begin{aligned} |\,\varepsilon_i^{(v)}\,| &< \varepsilon\\ |\,c_i^{(v)}\,| &< K_i\\ t_i &= \mathrm{Max}\,(s_0,\ s_1\ldots s_i) \end{aligned}\right\} \text{ für alle i von 1 bis e.}$$

Es ist noch zu zeigen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = e_1,\ e_2 \dots e)$$

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_j^{(\nu)} = 0$$

für solche Werte j von 1 bis $(r - e)$, für die der Punkt $(e + j,\ s_{e+j})$ auf der isolierten Polygonseite gelegen ist. Dies geschieht in folgender Weise. Die Ungleichungen:

$$|\varepsilon_j^{(N+k)}| < \varepsilon \qquad (j = e_1,\ e_2 \dots e),\ (k = 0, 1, 2 \dots r - e - 1)$$

$$|\delta_{i,l}^{(N)}| < \frac{\vartheta}{2}\varepsilon \quad (i = 1, 2 \dots r),\ (l = 0, 1, 2 \dots r - e)$$

$$|\sigma_j^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{2z}$$

zogen die Ungleichungen (S. 33 oben)

$$|\varepsilon_j^{(N+r-e)}| < \vartheta\varepsilon \qquad (j = e_1,\ e_2 \dots e)$$

nach sich. Nach unserem Verfahren erkennt man, daß dann

$$|\varepsilon_j^{(\nu)}| < \vartheta\varepsilon \text{ für alle } \nu \geqq N + r - e.$$

Nun ist

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_{i,l}^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots r;\ l = 0, 1, 2 \dots r - e)$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sigma_j^{(\nu)} = 0 \qquad (j = e_1,\ e_2 \dots e),$$

es gibt also eine Zahl N_1 derart, daß für alle $\nu > N_1 > N + r - e$

$$|\sigma_j^{(\nu)}| < \frac{\vartheta\varepsilon}{2z}$$

$$|\delta_{i,l}^{(\nu)}| < \frac{\vartheta^2\varepsilon}{2}$$

$$|\varepsilon_j^{(\nu)}| < \vartheta\varepsilon$$

wird. Daraus folgt aber dann:

$$|\varepsilon_j^{(\nu)}| < \vartheta^2\varepsilon \text{ für alle } \nu \geqq N_1 + r - e.$$

Läßt man ν immer größere Werte annehmen, so kommt man schließlich auch auf eine Zahl N_2 von der Beschaffenheit, daß

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_j^{(\nu)}| &< \frac{\vartheta^2\varepsilon}{2z} \\ |\delta_{i,1}^{(\nu)}| &< \frac{\vartheta^3\varepsilon}{2} \\ |\varepsilon_j^{(\nu)}| &< \vartheta^2\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ für alle } \nu \geqq N_2$$

wird. Diese Ungleichungen aber ziehen die folgenden nach sich:

$$|\varepsilon_j^{(\nu)}| < \vartheta^3\varepsilon \quad \text{für alle } \nu \geqq N_2 + r - e.$$

Von einem gewissen ν-Wert an werden also bei dieser Schlußweise die Ungleichungen

$$|\varepsilon_j^{(\nu)}| < \vartheta^n\varepsilon \qquad (j = e_1,\ e_2 \ldots e)$$

erfüllt sein, wobei n eine beliebig große positive ganze Zahl ist. Da aber $0 < \vartheta < 1$, so folgt hieraus:

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_j^{(\nu)} = 0 \qquad (j = e_1,\ e_2 \ldots e),$$

also

$$b_j^{(\nu)} = a_j \left[\nu^{s_j}\right] \quad (j = e_1,\ e_2 \ldots e).$$

Damit aber ergibt sich aus den Gleichungen (27 a)

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_j^{(\nu)} = 0$$

für solche j, für welche der Punkt $(e + j,\ s_{e+j})$ auf der isolierten Polygonseite liegt. Hiemit ist aber auch gezeigt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} f_j^{(\nu)} = f_j = \frac{a_{e+j}}{a_e}$$

für die Werte j, für welche der Punkt $(e + j,\ s_{e+j})$ auf der isolierten Polygonseite gelegen ist. Damit ist aber der Hilfssatz V vollständig bewiesen, denn die letzte der Gleichungen (15) lehrt, daß für alle in Betracht kommenden ν-Werte $f_{r-e}^{(\nu)} \neq 0$ wird.

§ 6.

Abschätzung der Koeffizienten $p_\mu^{(\nu)}$ ($\mu = 0, 1, 2 \ldots$).

Soll die unendliche Reihe (12) ein Integral von Gleichung (11) sein, so muß sie die Gleichung (11) für alle möglichen Werte von $\nu \geqq N$ befriedigen. Die Koeffizienten $p_\mu^{(\nu)}$ sind daher so zu bestimmen, daß die Gleichung (11) für alle $\nu \geqq N$ erfüllt wird. Ist also ν irgendein Wert $\geqq N$ und multiplizieren wir die Gleichungen:

$$E_\nu^{(i,\gamma)} = p_0^{(\nu)} \Delta_\nu^{(i,\gamma)} + p_1^{(\nu)} \Delta_{\nu+1}^{(i,\gamma)} + p_2^{(\nu)} \Delta_{\nu+2}^{(i,\gamma)} + \cdots$$

$$E_{\nu+1}^{(i,\gamma)} = p_0^{(\nu+1)} \Delta_{\nu+1}^{(i,\gamma)} + p_1^{(\nu+1)} \Delta_{\nu+2}^{(i,\gamma)} + p_2^{(\nu+1)} \Delta_{\nu+3}^{(i,\gamma)} + \cdots$$

. . . . . .

$$E_{\nu+e}^{(i,\gamma)} = p_0^{(\nu+e)} \Delta_{\nu+e}^{(i,\gamma)} + p_1^{(\nu+e)} \Delta_{\nu+e+1}^{(i,\gamma)} + p_2^{(\nu+e)} \Delta_{\nu+e+2}^{(i,\gamma)} + \cdots$$

der Reihe nach mit $b_e^{(\nu)}$, $b_{e-1}^{(\nu)} \ldots b_1^{(\nu)}$, 1 und addieren sie, dann muß die rechte Seite gleich $\Delta_\nu^{(i,\gamma)}$ werden. Damit dies eintritt, reicht es hin, daß die $p_\mu^{(\nu)}$ gewissen Rekursionsformeln genügen, aus denen sie eben berechnet werden können. Diese so erhaltenen Rekursionsformeln liefern jedoch für den Konvergenznachweis der Reihe (12) keine brauchbare Abschätzung von $p_\mu^{(\nu)}$. Wir müssen also einen andern Weg einschlagen, und dazu dient uns ein von Herrn Perron bewiesenes Reziprozitätsprinzip (L.-V. III, 4 § 3). Darnach lassen sich die $p_\mu^{(\nu)}$ auch dadurch bestimmen, daß man die Gleichungen:

$$\Delta_\nu^{(i,\gamma)} = b_e^{(\nu)} E_\nu^{(i,\gamma)} + b_{e-1}^{(\nu)} E_{\nu+1}^{(i,\gamma)} + \cdots + b_1^{(\nu)} E_{\nu+e-1}^{(i,\gamma)} + E_{\nu+e}^{(i,\gamma)}$$

$$\Delta_{\nu+1}^{(i,\gamma)} = b_e^{(\nu+1)} E_{\nu+1}^{(i,\gamma)} + b_{e-1}^{(\nu+1)} E_{\nu+2}^{(i,\gamma)} + \cdots + b_1^{(\nu+1)} E_{\nu+e}^{(i,\gamma)} + E_{\nu+e+1}^{(i,\gamma)}$$

$$\Delta_{\nu+2}^{(i,\gamma)} = b_e^{(\nu+2)} E_{\nu+2}^{(i,\gamma)} + b_{e-1}^{(\nu+2)} E_{\nu+3}^{(i,\gamma)} + \cdots + b_1^{(\nu+2)} E_{\nu+e+1}^{(i,\gamma)} + E_{\nu+e+2}^{(i,\gamma)}$$

. . . . . .

der Reihe nach mit $p_0^{(\nu)}$, $p_1^{(\nu)}$, $p_2^{(\nu)}$ ... multipliziert und addiert. Dann muß sich die rechte Seite identisch auf $E_\nu^{(i,\gamma)}$ reduzieren. Man erhält auf diese Weise das Gleichungensystem:

$$
(29)\quad \begin{cases}
b_e^{(\nu)}\, p_0^{(\nu)} = 1 \\
b_{e-1}^{(\nu)}\, p_0^{(\nu)} + b_e^{(\nu+1)}\, p_1^{(\nu)} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu+1)}\, p_1^{(\nu)} + b_2^{(\nu+2)}\, p_2^{(\nu)} + \cdots + b_e^{(\nu+e)}\, p_e^{(\nu)} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_{\mu-e}^{(\nu)} + b_1^{(\nu+\mu-e+1)}\, p_{\mu-e+1}^{(\nu)} + b_2^{(\nu+\mu-e+2)}\, p_{\mu-e+2}^{(\nu)} + \cdots \\
\qquad\qquad + b_e^{(\nu+\mu)}\, p_\mu^{(\nu)} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Da $b_e^{(\nu+\mu)} \neq 0$, so lassen sich hieraus $p_0^{(\nu)}$, $p_1^{(\nu)}$, $p_2^{(\nu)}$ ... sukzessive berechnen. Die erste Gleichung liefert:

$$
(30)\qquad p_0^{(\nu)} = \frac{1}{b_e^{(\nu)}} = \frac{1}{a_e\left(1+\varepsilon_e^{(\nu)}\right)\nu^{s_e}},
$$

während von der zweiten Gleichung von (29) an man allgemein

$$
(31)\qquad -p_\mu^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{e-1} \frac{b_j^{(\nu+\mu-e+j)}}{b_e^{(\nu+\mu)}}\, p_{\mu-e+j}^{(\nu)} \qquad (\mu = 1, 2 \ldots)
$$

erhält. Dabei setzen wir wieder fest, daß solche $p_\mu^{(\nu)}$, die einen negativen unteren Index besitzen, gleich Null seien, während $b_0^{(\nu+\mu-e)}$ den Wert eins habe. Aus der letzten Gleichung folgt mit Gleichung (28) und (28 a)

$$
(32)\qquad \left|p_\mu^{(\nu)}\right| < \sum_{j=0}^{e-1} \frac{1+2\varepsilon}{|a_e|} \frac{K_j\,(\nu+\mu-e+j)^{t_j}}{(\nu+\mu)^{s_e}} \left|p_{\mu-e+j}^{(\nu)}\right| \qquad (\mu = 1, 2 \ldots).
$$

Setzt man

$$
(33)\qquad \frac{1+2\varepsilon}{|a_e|} = d
$$

und bedeutet L eine Zahl, für welche

$$
(34)\qquad \sum_{j=0}^{e-1} d\, K_j\, L^{j-e} < 1
$$

ist, setzt man endlich noch

$$
(35)\qquad s = \operatorname*{Min}_{j=0}^{e-1} \frac{s_e - s_j}{e-j},
$$

so muß die Gültigkeit der Ungleichungen:

$$(36) \qquad \left|p_\mu^{(v)}\right| < \frac{d}{v^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s} \qquad (\mu = 0, 1, 2 \ldots)$$

nachgewiesen werden. Aus (30) und (33) ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit von (36) für $\mu = 0$. Die Allgemeingültigkeit von (36) aber läßt sich mit vollständiger Induktion nachweisen. Nimmt man nämlich die Ungleichung (36) für kleinere Werte von μ als richtig an, dann folgt aus (32):

$$\left|p_\mu^{(v)}\right| < \sum_{j=0}^{e-1} d\, K_j (v+\mu)^{t_j - s_e} \frac{d}{v^{s_e}} L^{\mu-e+j} \left((\mu - e + j)!\right)^{-s}$$

$$= \frac{d}{v^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} d\, K_j\, L^{j-e} (v+\mu)^{t_j - s_e} \left(\mu(\mu-1)\ldots(\mu - e + j + 1)\right)^s$$

$$< \frac{d}{v^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s} \sum_{j=0}^{e-1} d\, K_j\, L^{j-e} (v+\mu)^{t_j - s_e + (e-j)s}.$$

Nun läßt sich genau wie bei Herrn Perron in L.-V. III, 4 S. 123 zeigen, daß der Exponent von $(v+\mu)$ in jedem Glied der letzten Summe negativ oder höchstens gleich Null ist. Daraus aber folgt unter Berücksichtigung von (34) in der Tat:

$$\left|p_\mu^{(v)}\right| < \frac{d}{v^{s_e}} L^\mu (\mu!)^{-s},$$

w. z. b. w.

Schließlich wäre noch zu zeigen, daß

$$(37) \qquad p_\mu^{(v)} = q_\mu^{(v)} (v+\mu)^{\vartheta_\mu} \qquad (\mu = 1, 2 \ldots)$$

wird, wo $q_\mu^{(v)}$ unter einer von v unabhängigen Schranke bleibt, und wo

$$\vartheta_\mu = \max_{j=0}^{e-1} \left(t_j - s_e + \vartheta_{\mu-e+j}\right) \qquad (\mu = 1, 2 \ldots).$$

Hiebei setzen wir fest, daß den Exponenten ϑ_k, für welche $\begin{cases} k < 0 \\ k = 0 \end{cases}$ wird, der Wert $\begin{cases} -\infty \\ -s_e \end{cases}$ beizulegen ist. Jedenfalls ist also:

$$\vartheta_\mu < -s_e \qquad (\mu \geqq 1).$$

Nun liefert die zweite Gleichung des Systems (29):

$$p_1^{(v)} = -\frac{b_{e-1}^{(v)}\, p_0^{(v)}}{b_e^{(v+1)}},$$

woraus nach Gleichung (28) und (30) und (28 a)

$$\begin{aligned} p_1^{(v)} &= -\frac{c_{e-1}^{(v)}\, v^{t_e-1}}{a_e^2\, v^{s_e}(v+1)^{s_e}\left(1+\varepsilon_e^{(v)}\right)\left(1+\varepsilon_e^{(v+1)}\right)} \\ &= -\frac{c_{e-1}^{(v)}}{a_e^2\left(1+\varepsilon_e^{(v)}\right)\left(1+\varepsilon_e^{(v+1)}\right)}\,\frac{v^{t_e-1-s_e}}{(v+1)^{s_e+t_e-1-2s_e}}\,(v+1)^{\vartheta_1} \\ &= q_1^{(v)}(v+1)^{\vartheta_1}. \end{aligned}$$

Da $q_1^{(v)}$ offenbar als Funktion von v beschränkt ist, so ist hiemit die Gleichung (37) für $\mu = 1$ bewiesen. Ihre Allgemeingültigkeit weisen wir wieder mittels vollständiger Induktion nach. Wir nehmen also Gleichung (37) für kleinere Werte von μ als richtig an, dann folgt aus (31):

$$\begin{aligned} p_\mu^{(v)} &= -\sum_{j=0}^{e-1} \frac{c_j^{(v+\mu-e+j)}\, q_{\mu-e+j}^{(v)}}{c_e^{(v+\mu)}}\,\frac{(v+\mu-e+j)^{t_j}\,(v+\mu-e+j)^{\vartheta_{\mu-e+j}}}{(v+\mu)^{s_e}} \\ &= q_\mu^{(v)}(v+\mu)^{\vartheta_\mu}, \end{aligned}$$

wo

$$q_\mu^{(v)} = -\sum_{j=0}^{e-1} \frac{c_j^{(v+\mu-e+j)}\, q_{\mu-e+j}^{(v)}}{c_e^{(v+\mu)}}\,\frac{(v+\mu-e+j)^{t_j+\vartheta_{\mu-e+j}}}{(v+\mu)^{s_e+\vartheta_\mu}}.$$

Da in dieser endlichen Summe jedes Glied offenbar für alle v beschränkt ist, so gilt dies auch von der Summe. Für die $p_\mu^{(v)}$ ist damit alles früher Gebrauchte bewiesen. Es beibt uns noch der Beweis von Satz III.

§ 7.

Beweis des Satzes III.

Ist $D_v^{(j)}$ ein Integral der Poincaréschen Differenzengleichung:

$$D_{v+r} + a_1^{(v)} D_{v+r-1} + \cdots + a_r^{(v)} D_v = 0 \tag{38}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$f(x) \equiv x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r = 0$$

von der Art, daß die ihm entsprechende Wurzel ϱ_i von der Multiplizität eins ist und ihr absoluter Betrag $|\varrho_i|$ den Relationen

$$|\varrho_r| \leqq \cdots \leqq |\varrho_{i+2}| \leqq |\varrho_{i+1}| < |\varrho_i| < |\varrho_{i-1}| \leqq |\varrho_{i-2}| \leqq \cdots \leqq |\varrho_1|$$

genügt, wobei in diesen Ungleichungen immer $|\varrho_1|$ an letzter Stelle stehen soll, dann wollen wir zeigen, daß für das Integral $D_v^{(i)}$ die Beziehung gilt:

$$\lim_{v=\infty} \frac{D_{v+1}^{(i)}}{D_v^{(i)}} = \varrho_i .$$

Wir bemerken, daß im Falle $i = 1$ die Richtigkeit dieses Satzes sich ohne weiteres aus der Arbeit des Herrn Perron L.-V. III, 1 S. 28 f. ergibt. Für $i > 1$ wird die Sache folgendermaßen bewiesen.

Auf Grund des Hilfssatzes III in L.-V. III, 2 S. 22 läßt sich die linke Seite von (38) für $v \geqq N$ auf die Form bringen:

$$(39)\quad \begin{cases} D_{v+r} + c_1^{(v+r-e)} D_{v+r-1} + \cdots + c_e^{(v+r-e)} D_{v+r-e} \\ + b_1^{(v)} \{D_{v+r-1} + c_1^{(v+r-e-1)} D_{v+r-2} + \cdots + c_e^{(v+r-e-1)} D_{v+r-e-1}\} \\ + \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + b_{r-e}^{(v)} \{D_{v+e} + c_1^{(v)} D_{v+e-1} + \cdots + c_e^{(v)} D_v\} = 0 . \end{cases}$$

Dabei wird

$$\lim_{v=\infty} b_j^{(v)} = b_j \qquad (j = 1, 2 \ldots r-e)$$

$$\lim_{v=\infty} c_k^{(v)} = c_k \qquad (k = 1, 2 \ldots e) .$$

$$c_e^{(v)} \neq 0 \quad \text{für alle } v.$$

Die b_i und c_k aber sind gegeben durch

$$\varphi(x) \equiv x^{r-e} + b_1 x^{r-e-1} + \cdots + b_{r-e}$$

$$w(x) \equiv x^e + c_1 x^{e-1} + \cdots + c_e ,$$

wobei

$$f(x) = \varphi(x)\, w(x)$$

und wo die Zerlegung von $f(x)$ so geschehen ist, daß $\varphi(x)$ die Wurzeln ϱ_i, $\varrho_{i+1} \dots \varrho_r$ besitzt (also $e = i - 1$). Jetzt führt die Substitution:

$$D_{v+e} + c_1^{(v)} D_{v+e-1} + \cdots + c_e^{(v)} D_v = E_v \tag{40}$$

die Gleichung (39) über in die Poincarésche Gleichung:

$$E_{v+r-e} + b_1^{(v)} E_{v+r-e-1} + \cdots + b_{r-e}^{(v)} E_v = 0 \tag{41}$$

mit der charakteristischen Gleichung:

$$\varphi(x) = 0.$$

Nach unseren Voraussetzungen über ϱ_i und der Bemerkung am Anfang des Beweises gilt daher für das Fundamentalintegral $E_v^{(1)}$ von (41) die Beziehung:

$$\lim_{v=\infty} \frac{E_{v+1}^{(1)}}{E_v^{(1)}} = \varrho_i .$$

Denken wir uns jetzt die Betrachtungen von S. 25 bis 27 in L.-V. III, 2 gemacht, dann interessiert uns insbesondere das Partikulärintegral $D_v^{(i)}$ der inhomogenen Gleichung:

$$D_{v+e} + c_1^{(v)} D_{v+e-1} + \cdots + c_e^{(v)} D_v = E_v^{(1)}, \tag{42}$$

das a. a. O. durch die Reihe

$$D_v^{(i)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(v)} E_{v+\mu}^{(1)} = E_v^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(v)} \frac{E_{v+\mu}^{(1)}}{E_v^{(1)}}$$

dargestellt wird. Die $p_\mu^{(v)}$ ergeben sich dabei nach a. a. O. S. 28. Wählen wir die zwei Zahlen σ_1 und σ_2 so, daß

$$|\varrho_i| < \sigma_1 < \sigma_2 < |\varrho_{i-1}|,$$

dann gilt nach S. 29 a. a. O.

$$|p_\mu^{(v)}| \leqq \left(|p_0^{(v)}| + |p_1^{(v)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(v)}| \right) C \frac{1}{\sigma_2^\mu},$$

wo C weder von μ noch von $p_0^{(v)}$, $p_1^{(v)} \dots p_{e-1}^{(v)}$ noch von v überhaupt abhängt. Ist ε eine positive Zahl von der Art, daß

$$|\varrho_i| + \varepsilon < \sigma_1,$$

dann gilt, da

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{E_{\nu+1}^{(1)}}{E_\nu^{(1)}} = \varrho_1,$$

für alle $\nu \geqq N'$

$$\left| \frac{E_{\nu+\mu}^{(1)}}{E_\nu^{(1)}} \right| < (|\varrho_1| + \varepsilon)^\mu < \sigma_1^\mu.$$

Damit wird aber der Rest

$$R_n = \sum_{\mu=n+1}^{\infty} p_\mu^{(\nu)} \frac{E_{\nu+\mu}^{(1)}}{E_\nu^{(1)}}$$

$$|R_n| < (|p_0^{(\nu)}| + |p_1^{(\nu)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(\nu)}|)\, C \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \cdots\right),$$

also gewiß

$$|R_n| < S \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{n+1},$$

wo S eine von ν unabhängige Konstante ist. Man darf daher in

$$T_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(\nu)} \frac{E_{\nu+\mu}^{(1)}}{E_\nu^{(1)}}$$

beim Grenzübergang zu $\lim \nu = \infty$ denselben gliedweise durchführen. Nach S. 30 a. a. O. haben die $p_\mu^{(\nu)}$ bei konstant gehaltenem μ für $\lim \nu = \infty$ bestimmte Grenzwerte p_μ. Deshalb wird

$$\lim_{\nu=\infty} T_\nu = p_0 + p_1 \varrho_1 + p_2 \varrho_1^2 + \cdots$$

Daher ist auch

$$\lim_{\nu=\infty} T_{\nu+1} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} p_\mu^{(\nu+1)} \frac{E_{\nu+\mu+1}^{(1)}}{E_{\nu+1}^{(1)}} = p_0 + p_1 \varrho_1 + \cdots$$

Nun besagt offenbar das Gleichungssystem in L.-V. III, 2 S. 30, daß identisch

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots)(c_e + c_{e-1} x + \cdots + c_1 x^{e-1} + x^e) = 1$$

ist. Daher liegt ϱ_1 im Innern des Konvergenzkreises der Reihe

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots,$$

und es ist

$$p_0 + p_1 \varrho_i + p_2 \varrho_i^2 + \cdots = \frac{1}{w(\varrho_i)} \neq 0.$$

Es ist also

$$\lim_{v=\infty} \frac{T_{v+1}}{T_v} = \frac{p_0 + p_1 \varrho_i + p_2 \varrho_i^2 + \cdots}{p_0 + p_1 \varrho_i + p_2 \varrho_i^2 + \cdots} = 1,$$

so daß schließlich

$$\lim_{v=\infty} \frac{D_{v+1}^{(i)}}{D_v^{(i)}} = \lim_{v=\infty} \frac{E_{v+1}^{(1)}}{E_v^{(1)}} \frac{T_{v+1}}{T_v} = \varrho_i$$

w. z. b. w.

§ 8.

Zwei Beispiele.

Zum Schluß führen wir die Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen an zwei Beispielen vor. Als erstes wählen wir eines, das auch der Methode des Herrn Erb zugänglich ist, nämlich die Gleichung:

$$(43) \quad D_{v+7} + v^2 D_{v+6} - 2v^4 D_{v+5} + 14 \sqrt[10]{v^3} D_{v+3} - 12 v^3 D_{v+2} + 36 v D_{v+1} - 24 v^{-1} D_v = 0.$$

Das ihr entsprechende Newton-Puiseuxsche Polygon hat die Form der Fig. 3.

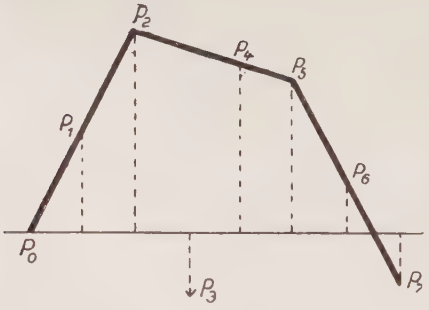

Fig. 3.

Die Fundamentalintegrale von (43) zerfallen also in 3 Klassen. Die Unterklassen erhält man aus den charakteristischen Gleichungen. Für die 1. Klasse lautet die charakteristische Gleichung:

$$x^3 + x - 2 = 0.$$

Sie besitzt die Wurzeln 1, — 2. Demnach bilden die Integrale der 1. Klasse zwei Unterklassen, und da der Richtungsfaktor der 1. Seite = 2 ist, so gilt für das Integral der 1. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^2 D_\nu} = -2, \tag{44}$$

für das Integral der 2. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^2 D_\nu} = 1. \tag{45}$$

Die charakteristische Gleichung, die über die Unterklassen der 2. Klasse entscheidet, lautet:

$$-2x^3 + 14x - 12 = 0$$

und hat die Wurzeln — 3, 2, 1. Somit zerfallen die Integrale der 2. Klasse in 3 Unterklassen, und zwar gilt infolge des Richtungsfaktors $-\frac{1}{3}$ der 2. Seite für das Integral der 1. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-\frac{1}{3}} D_\nu} = -3, \tag{46}$$

für das Integral der 2. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-\frac{1}{3}} D_\nu} = 2, \tag{47}$$

für das Integral der 3. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-\frac{1}{3}} D_\nu} = 1. \tag{48}$$

Für die 3. Klasse endlich ergibt sich als charakteristische Gleichung:

$$-12x^2 + 36x - 24 = 0$$

mit den Wurzeln 2, 1. Folglich besitzt die 3. Klasse 2 Unterklassen, und es kommt mit dem Richtungsfaktor — 2 der 3. Seite für das Integral der 1. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-2} D_\nu} = 2, \tag{49}$$

für das Integral der 2. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-2} D_\nu} = 1. \tag{50}$$

Demnach genügt das allgemeine Integral von (43) der Gleichung (44). Diejenigen Integrale, welche sich aus dem Integral der 2. Unterklasse der 1. Klasse sowie den Integralen der 2. und 3. Klasse linear zusammensetzen, genügen der Gleichung (45). Die Integrale, die sich linear aus den Integralen der 2. und 3. Klasse aufbauen, befriedigen die Gleichung (48), (47) bezw. (46), je nachdem von der 2. Klasse nur die 3., die 2. und 3. oder alle 3 Unterklassen vertreten sind. Die Integrale endlich, die nur aus Integralen der 3. Klasse bestehen, erfüllen die Gleichung (49). Das Integral der 2. Unterklasse der 3. Klasse, und nur dieses, genügt der

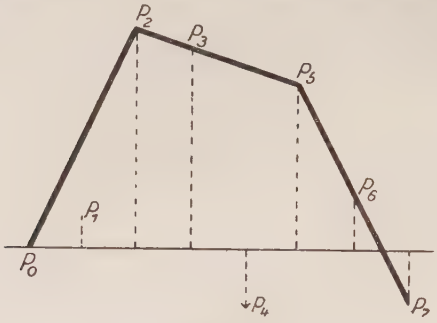

Fig. 4.

Relation (50). Es ist also im Sinne von Pincherle das „ausgezeichnete“ Integral der Gleichung (43).

Die gleichen Resultate gibt hier die Methode des Herrn Erb; dieselbe ist anwendbar, weil sämtliche charakteristischen Gleichungen nur einfache Wurzeln mit voneinander verschiedenen absoluten Beträgen besitzen.

Anders aber verhält sich die Sache bei der Gleichung:

$$D_{\nu+7} + 5\nu^{\frac{1}{2}} D_{\nu+6} - 2\nu^4 D_{\nu+5} + 3\nu^{\frac{11}{3}} D_{\nu+4} - \nu^3 D_{\nu+2} + 3\nu D_{\nu+1} - 2\nu^{-1} D_\nu = 0. \tag{51}$$

Ihr Newton-Puiseuxsches Polygon hat die Form von Fig. 4.

Die Integrale von (51) zerfallen also auch wieder in drei Klassen. Für die 1. Klasse ergibt sich als charakteristische Gleichung:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Sie besitzt die Wurzeln $\pm\sqrt{2}$, d. h. lauter Wurzeln von gleichem absoluten Betrag, folglich zerfallen die Integrale der 1. Klasse in keine Unterklassen. Der Richtungsfaktor der 1. Seite ist 2, für die beiden Integrale der 1. Klasse gilt also

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{\frac{2}{\nu}}} = \sqrt{2}. \tag{52}$$

Für die 2. Klasse lautet die charakteristische Gleichung:

$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind 1, 1, $-\frac{1}{2}$, d. h. man bekommt zwei voneinander verschiedene absolute Beträge, also bilden die drei Integrale der 2. Klasse zwei Unterklassen. Der Richtungsfaktor der 2. Seite ist $-\frac{1}{3}$, für die zwei Integrale der 1. Unterklasse gilt somit:

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{-\frac{1}{3\nu}}} = 1, \tag{53}$$

während für das Integral der 2. Unterklasse

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{\sqrt[\nu]{|D_\nu|}}{(\nu!)^{-\frac{1}{3\nu}}} = \frac{1}{2}$$

ist, und sogar die genauere Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-\frac{1}{3}} D_\nu} = -\frac{1}{2} \tag{54}$$

statthat.

Schließlich ergibt sich für die 3. Klasse die charakteristische Gleichung:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

mit den Wurzeln 2, 1. Hier gibt es also 2 Unterklassen. Da der Richtungsfaktor der 3. Seite — 2 ist, gilt für das Integral der 1. Unterklasse:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-2} D_\nu} = 2, \tag{55}$$

für das Integral der 2. Unterklasse

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{\nu^{-2} D_\nu} = 1. \tag{56}$$

Es besteht somit für das allgemeine Integral von (51) die Gleichung (52). Die Partikulärintegrale, die sich linear aus den Integralen der 2. und 3. Klasse zusammensetzen, genügen der Gleichung (54) oder (53), je nachdem von der 2. Klasse nur die 2. oder auch die 1. Unterklasse vertreten ist. Die Partikulärintegrale, die bloß aus den Integralen der 3. Klasse gebildet sind, erfüllen die Gleichung (55). Das Integral der 2. Unterklasse der 3. Klasse ist das „ausgezeichnete" Integral der Gleichung (51). Es genügt allein der Gleichung (56).

Bei dem letzten Beispiel wird die Anwendung der Methode des Herrn Erb durch das Auftreten von Doppelwurzeln unmöglich. Auch die zwei Wurzeln $\pm \sqrt{2}$ von gleichem absoluten Betrag hindern die Anwendung der Erbschen Methode.

Zur vorliegenden Arbeit veranlaßte mich mein verehrter Lehrer, Herr Professor Dr. Perron. Für sein freundliches Entgegenkommen, das er mir jederzeit zuteil werden ließ, möchte ich auch hier meinen herzlichen Dank aussprechen.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.